AKC TECHNICAL CLASSES

SUBSCRIBE NOW

SYLLABUS

अनुप्रयुक्त भौतिकी–I

(APPLIED PHYSICS-I)

1. **Units and Dimensions**
   - 1.1 Need of Measurement in engineering and science, unit of a physical quantities — fundamental and derived units, systems of units (FPS, CGS and SI units).
   - 1.2 Dimensions and dimensional formulae of physical quantities.
   - 1.3 Principle of homogeneity of dimensions.
   - 1.4 Dimensional equations and their applications, conversion of numerical values of physical quantities from one system of units into another, checking the correctness of physical equations and deriving relations among various physical quantities.
   - 1.5 Limitations of dimensional analysis.
   - 1.6 Error in measurement, accuracy and precision of instruments, random and systematic errors, absolute error, relative error, and percentage error, Estimation of probable errors in the results of measurement (combination of errors in addition, subtraction, multiplication, division and powers), rules for representing significant figures in calculation.
   - 1.7 Application of units and dimensions in measuring length, diameter, circumference, volume, surface area etc., of metallic and non-metallic blocks, wires, pipes etc., (at least two each).
2. **Force and Motion**
   - 2.1 Scalar and vector quantities – examples, representation of vector, types of vectors.
   - 2.2 Addition and Subtraction of Vectors, Triangle and Parallelogram law (Statement only), Scalar and Vector Product.
   - 2.3 Resolution of Vectors and its application to lawn roller.
   - 2.4 Force, Momentum, Statement and Derivation of Conservation of linear momentum, its applications such as recoil of gun.
   - 2.5 Impulse and its Applications.
   - 2.6 Circular motion (Uniform and Non-uniform), definition of angular displacement, angular velocity, angular acceleration, frequency, time period.
   - 2.7 Relation between linear and angular velocity, linear acceleration and angular acceleration (related numerical).
   - 2.8 Central force, Expression and Applications of Centripetal and centrifugal forces with examples such as banking of roads and bending of cyclist, Principle of centrifuge.
   - 2.9 Application of various forces in lifts, cranes, large steam engines and turbines.
3. **Work, Power and Energy**
   - 3.1 **Work:** Its units, examples of zero work, positive work and negative work, conservative and non-conservative force.
   - 3.2 **Friction:** Modern concept, types, laws of limiting friction, Coefficient of friction and its Engineering Applications.
   - 3.3 Work done in moving an object on horizontal and inclined plane for rough and plane surfaces with its applications
   - 3.4 **Energy and its units:** Kinetic energy and potential energy with examples and their derivation, work energy theorem.
   - 3.5 Principle of conservation of mechanical energy for freely falling bodies, examples of transformation of energy.
   - 3.6 Power and its units, calculation of power in numerical problems
   - 3.7 Application of Friction in brake system of moving vehicles, bicycle, scooter, car, trains etc.
4. **Rotational Motion**
   - 4.1 Concept of translatory and rotatory motions with examples.
   - 4.2 Definition of torque with examples.
   - 4.3 Angular momentum, Conservation of angular momentum (quantitative) and its examples.
   - 4.4 Moment of inertia and its physical significance, radius of gyration for rigid body, Theorems of parallel and perpen-dicular axes (statements only), Moment of inertia of rod, disc, ring and sphere (hollow and solid) (Formulae only). Concept of Fly wheel.

4.5 Rotational kinetic energy, Rolling of sphere on the slant plane.
4.6 Comparison of linear motion and rotational motion.
4.7 Application of rotational motions in transport vehicles, and machines.

5 Motion of planets and satellites
5.1 Gravitational force, Kepler's law of planetary motion.
5.2 Acceleration due gravity and its variation.
5.3 Gravitational Potential and Gravitational potential energy.
5.4 Motion of satellite, orbital velocity and time period of satellite, Total energy and Binding energy of a satellite, Escape energy and escape velocity.
5.5 Types of satellites, Geo-stationary satellite, semi-synchronous, polar satellite (concept only) and their uses in science and technology.
5.6 Concept of Black Holes.

6. Properties of Matter
6.1 **Elasticity:** Definition of stress and strain, different types of modulii of elasticity, Hooke's law, significance of stress strain curve.
6.2 **Pressure:** Definition, its units, atmospheric pressure, gauge pressure, absolute pressure, Fortin's Barometer and its applications.
6.3 **Surface tension:** Concept, its units, angle of contact, Capillary action and determination of surface tension from capillary rise method, applications of surface tension, effect of temperature and impurity on surface tension
6.4 **Viscosity and coefficient of viscosity:** Terminal velocity, Stoke's law and effect of temperature on viscosity, application in hydraulic systems.
6.5 Concept of fluid motion, stream line and turbulent flow, Reynold's number Equation of continuity, Bernoulli's Theorem and their applications.

7. Heat and Thermodynamics
7.1 Difference between heat and temperature
7.2 Modes of transfer of heat (Conduction, convection and radiation with examples).
7.3 Different scales of temperature and their relationship.
7.4 Expansion of solids, liquids and gases, coefficient of linear, surface and cubical expansions and relation amongst them.
7.5 Heat conduction in a metal rod, Temperature gradient, Concept of Co-efficient of thermal conductivity, Uses and effects of Heat Conduction in Daily life.
7.6 Isothermal and Adibatic process.
7.7 Zeroth, First and second law of thermodynamics, Heat engine (concept Only), Carnot cycle.
7.8 Application of various systems of thermometry in refrigeration and air-conditioning etc.

विषय सूची

अध्याय 1

मात्रक एवं विमायें
Units and Dimensions

एक शब्दीय उत्तर (ONE WORD ANSWERS)

प्रश्न 1. मात्रक कितने प्रकार के होने है? तथा कौन-कौन से हैं?

उत्तर– मात्रक दो प्रकार के होते हैं-

(*i*) मूल मात्रक (*ii*) व्युत्पन्न मात्रक

प्रश्न 2. S.I प्रणाली में मोल किस मूल राशि का मात्रक है?

उत्तर– पदार्थ के परिमाण का।

प्रश्न 3. पास्कल किस भौतिक राशि का मात्रक है?

उत्तर– दाब का।

प्रश्न 4. गतिज ऊर्जा का मात्रक तथा विमीय सूत्र लिखिए।

उत्तर– जूल, $[ML^2 T^{-2}]$

प्रश्न 5. दो विमाहीन राशियों के नाम लिखिए।

उत्तर– कोण तथा विकृति।

प्रश्न 6. स्प्रिंग का बल नियतांक की विमा लिखिए।

उत्तर– $[MT^{-2}]$

प्रश्न 7. गुरुत्वाकर्षण नियतांक की विमा लिखिए।

उत्तर– $[ML^2 T^{-1}]$

प्रश्न 8. विशिष्ट ऊष्मा की विमा लिखिए।

उत्तर– $[L^2 T^{-2} \theta^{-1}]$

प्रश्न 9. ऊष्मा चालकता गुणांक की विमा लिखिए।

उत्तर– $[MLT^{-3} \theta^{-1}]$

प्रश्न 10. श्यानता गुणांक की विमा लिखिए। (2016)

उत्तर– $[ML^{-1} T^{-1}]$

प्रश्न 11. (8.25 + 3.3) का मान उचित सार्थक अंकों में लिखिए।

उत्तर– 11.6

प्रश्न 12. किसी मापन यन्त्र की यथार्थता सीमा कितनी होती है?

उत्तर– उसकी अल्पतमांक के बराबर।

प्रश्न 13. प्रतिशत त्रुटि क्या है?

उत्तर– प्रतिशत त्रुटि = आपेक्षिक त्रुटि × 100

$$= \frac{\Delta a_{\text{माध्य}}}{a_{\text{माध्य}}} \times 100\%$$

प्रश्न 14. कार्य का विमीय मात्रक लिखिए।

उत्तर– किग्रा- मीटर^2- सेकण्ड$^{-2}$

प्रश्न 15. उन तीन भौतिक राशियों को बताइये जिनकी विमायें $[ML^{-1} T^{-2}]$ हैं?

उत्तर– दाब, प्रतिबल, यंग प्रत्यास्थता गुणांक।

अति लघु उत्तरीय प्रश्न (VERY SHORT ANSWER QUESTIONS)

प्रश्न 1. मात्रक से आप क्या समझते हैं?

उत्तर–मात्रक (Unit)– किसी भैतिक राशि के लिए वह सुपरिभाषित मान, जिससे तुलना करने पर उसी प्रकार की भौतिक राशि का परिणाम ज्ञात किया जाता है, उस राशि का मात्रक कहलाता है।

प्रश्न 2. मूल मात्रक क्या है?

उत्तर– वे मात्रक जो पूर्ण रूप से स्वतन्त्र हों और एक-दूसरे से सम्बन्धित नहीं किये जा सकते मूल मात्रक कहलाते हैं।

प्रश्न 3. व्युत्पन्न मात्रक क्या है?

उत्तर– जो मात्रक, मूल मात्रकों पर आधारित होते हैं उन्हें व्युत्पन्न मात्रक कहते हैं। क्षेत्रफल, आयतन, घनत्व आदि के मात्रक व्युत्पन्न मात्रक हैं।

प्रश्न 4. विमा (Dimensions) को परिभाषित करें।

उत्तर– किसी भौतिक राशि का व्युत्पन्न मात्रक प्राप्त करने के लिए मूल मात्रकों पर जो घातें चढ़ाई जाती हैं, उन्हें उस भौतिक राशि की विमाएं कहते हैं।

प्रश्न 5. विमीय समीकरण को समझाइये।

उत्तर– विमीय समीकरण वह समीकरण है जिसमें किसी भौतिक राशि को मूल राशियों और उनकी विमाओं के पदों में निरुपित किया जाता है।

प्रश्न 6. वाण्डरवाल्स अवस्था गैस समीकरण

$$\left(P+\frac{a}{V^2}\right)(v-b)=RT$$ **में a तथा b नियतांकों की विमाएं तथा मात्रक ज्ञात कीजिए।**

उत्तर– समीकरण के विमीय सन्तुलन के सिद्धान्तानुसार दो समान विमा वाली राशियों को ही आपस में जोड़ा तथा घटाया जा सकता है।

$\therefore$ $\left(\frac{a}{V^2}\right)$ की विमा = दाब P की विमा

अत:
$$[a] = [P][V^2]$$
$$= [ML^{-1}T^{-2}][L^3]^2$$
$$= [ML^5T^{-2}]$$

a की विमा = $[ML^5T^{-2}]$

$\therefore$ a का S.I. मात्रक = किग्रा-मी^{5} – सेकण्ड$^{-2}$

तथा b की विमा = V की विमा = $[L^3]$

अत: b का S.I. मात्रक = मी^{3}

प्रश्न 7. श्यान द्रव में गिरती गोली पर कार्य करने वाला श्यान बल F सूत्र $F=6\pi\eta rv$ से व्यक्त किया जाता है, जहां η द्रव का श्यानता गुणांक, r गोली की त्रिज्या तथा v गोली का वेग है। श्यानता गुणांक का विमीय सूत्र प्राप्त कीजिये।

उत्तर– $F=6\pi\eta rv$ से श्यानता गुणांक

$$\eta = \frac{F}{6\pi rv}$$

अत:
$$[\eta] = \frac{[F]}{[r][v]} = \frac{MLT^{-2}}{[L][LT^{-1}]}$$
$$= [ML^{-1}T^{-1}]$$

प्रश्न 8. यथार्थता एवं परिशुद्धता (Accuracy) से आप क्या समझते हैं?

उत्तर– किसी माप की यथार्थता वह मान है जो यह बताता है कि किसी राशि का मापा गया मान उसके वास्तविक मान के कितना निकट है, जबकि परिशुद्धता यह बताती है कि वह राशि किस विभेदन या सीमा तक मापी गयी है।

प्रश्न 9. निरपेक्ष त्रुटि से आप क्या समझते हैं?

उत्तर– निरपेक्ष त्रुटि– भौतिक राशि की निरपेक्ष त्रुटियों के परिमाणों के समान्तर माध्य को भौतिक राशि की माध्य निरपेक्ष त्रुटि कहा जाता है।

प्रश्न 10. सार्थक अंकों की संख्या से क्या अभिप्राय है?

उत्तर– जितने अंकों से किसी राशि के मान को पूर्णतया व्यक्त किया जा सकता है, उनकी संख्या सार्थक अंकों की संख्या कहलाती है।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न
(LONG ANSWERS TYPE QUESTIONS)

प्रश्न 1. इंजीनियरिंग एवं विज्ञान के क्षेत्र में "मापन की आवश्यकता" को समझाइये।

उत्तर– मापन की आवश्यकता (Need of measurement)– विज्ञान की वह शाखा जिसमें प्रकृति तथा प्राकृतिक घटनाओं का अध्ययन किया जाता है भौतिकी कहलाती है। इस प्रकार की किसी भी घटना के अध्ययन अथवा विश्लेषण के लिए भौतिक राशियों का तुलनात्मक अध्ययन अपरिहार्य होता है। उदाहरणार्थ– कोई भी वस्तु स्वतन्त्र अवस्था में छोड़े जाने पर पृथ्वी की ओर गिरती है। हम जानना चाहते हैं कि वस्तु नीचे पृथ्वी की ओर क्यों गिरती है? यह ऊपर की ओर क्यों नहीं जाती? हम यह भी जानना चाहते हैं कि यह किस वेग से गिरती है? इसके गिरने की गति स्थिर है अथवा परिवर्तनशील। वस्तु के गिरने में कितना समय लगता है? यह भी जानना चाहेंगे हैं कि वस्तु के गिरने के समय तथा उसके भार में क्या कोई सम्बन्ध है? अत: इन सभी प्रश्नों का उत्तर जानने के लिए वस्तु के नीचे गिरने की दूरी, गिरने में वस्तु द्वारा लिये गये समय, वस्तु का भार आदि का मापन आवश्यक होता है। जीवन की दैनिक दिनचर्याओं में भी मापन की आवश्यकता पड़ती है। यह जानने के लिए कि कौन वस्तु हल्की है तथा कौन भारी है? हमारे शरीर का तापमान कितना है? किसी वस्तु की लम्बाई कितनी है? किसी स्थान की अमुक स्थान से दूरी कितनी है? इन सभी का ज्ञान प्राप्त

करने के लिए विभिन्न भौतिक राशियों जैसे- भार, तापमान, लम्बाई, दूरी आदि के मापन की आवश्यकता पड़ती है।

प्रश्न 2. मूल तथा व्युत्पन्न मात्रक (Fundamental and derived units) को सोदाहरण समझाइये।

उत्तर– विभिन्न भौतिक राशियों को देखने से प्रतीत होता है कि उनकी माप के लिए भिन्न-भिन्न मात्रकों की आवश्यकता होती है, परन्तु यह आवश्यक नहीं है कि वे एक-दूसरे से पूर्णतः स्वतन्त्र हों, क्योंकि इनमें से बहुत सी राशियाँ परस्पर सम्बन्धित होती हैं। उदाहरण के लिए चाल, दूरी तथा समय, सूत्र चाल = (दूरी/समय) के अनुसार परस्पर सम्बन्धित हैं, **अतः चाल के मात्रक को दूरी (लम्बाई) तथा समय के मात्रकों में व्यक्त किया जा सकता है।**

इसी प्रकार संवेग (= द्रव्यमान × वेग) के मात्रक को द्रव्यमान, दूरी तथा समय के मात्रकों में व्यक्त कर सकते हैं। वास्तव में यान्त्रिकी (mechanics) में प्रयुक्त होने वाली सभी भौतिक राशियों को लम्बाई (length), द्रव्यमान (mass) तथा समय (time) के मात्रकों में व्यक्त किया जाता है। इन तीनों राशियों के मात्रक एक-दूसरे से पूर्णतया स्वतन्त्र हैं तथा इनमें से किसी एक मात्रक को किसी अन्य मात्रक में बदला अथवा उससे सम्बन्धित नहीं किया जा सकता। अतः यान्त्रिकी में इन राशियों को मूल राशियाँ तथा इनके मात्रकों को मूल मात्रक कहते हैं। इनकी सहायता से प्राप्त की गयी अन्य भौतिक राशियां (जैसे- चाल, संवेग आदि) के मात्रक व्युत्पन्न मात्रक (derived units) कहलाते हैं।

इस प्रकार भौतिक राशियों को मापने के लिए मात्रकों को दो भागों में बाँटा गया है-

(1) वे मात्रक जिनमें आपस में कोई सम्बन्ध न हो तथा जो आपस में परिवर्तित नहीं किये जा सकें, मूल मात्रक (fundamental units) कहलाते हैं।

(2) वे मात्रक जो मूल मात्रकों पर आधारित होते हैं और जिन्हें मूल मात्रकों की सहायता से प्राप्त किया जाये, व्युत्पन्न मात्रक (derived units) कहलाते हैं।

प्रश्न 3. मात्रकों की प्रणालियों को विस्तारपूर्वक समझाइये।

उत्तर– मात्रकों की प्रणालियाँ (Systems of units)– मापन के लिये मात्रकों की विभिन्न प्रणालियाँ हैं। लम्बाई, द्रव्यमान तथा समय के मात्रकों पर आधारित निम्नलिखित तीन प्रणालियाँ हैं-

(1) फुट-पाउण्ड-सेकण्ड प्रणाली (Foot-Pound-Second System)– इस प्रणाली को संक्षेप में F.P.S. प्रणाली कहते हैं। इस प्रणाली में लम्बाई का मात्रक फुट, द्रव्यमान का मात्रक पाउण्ड तथा समय का मात्रक सेकण्ड होता है। इस प्रणाली को ब्रिटिश प्रणाली (British system) भी कहते हैं।

(2) सेन्टीमीटर-ग्राम-सेकण्ड प्रणाली (Centimetre-Gram-Second System) – इस प्रणाली को संक्षेप में C.G.S. प्रणाली कहते हैं। इस प्रणाली में लम्बाई का मात्रक सेन्टीमीटर, द्रव्यमान का मात्रक ग्राम तथा समय का मात्रक सेकण्ड होता है। इस प्रणाली को मीट्रिक प्रणाली (Metric system) भी कहते हैं।

(3) मीटर-किलोग्राम-सेकण्ड प्रणाली (Metre-Kilogram-Second System) – इस प्रणाली को संक्षेप में M.K.S. प्रणाली कहते हैं। इसमें लम्बाई का मात्रक मीटर, द्रव्यमान का मात्रक किलोग्राम तथा समय का मात्रक सेकण्ड होता है।

विद्युत एवं चुम्बकत्व में परिमेयित मीटर- किलोग्राम-सेकण्ड-ऐम्पियर प्रणाली (Rationalized Metre-Kilogram-Second-Ampere System) जिसे संक्षेप में R.M.K.S.A प्रणाली कहते हैं, का उपयोग किया जाता है।

प्रश्न 4. एस. आई. प्रणाली एवं उसके मूल मात्रकों को स्पष्ट रूप से समझाइये।

उत्तर– एस. आई. प्रणाली (International System of Units) – सन् 1960 में तौल एवं माप के अन्तर्राष्ट्रीय सम्मेलन (international committee on weights and measures) ने मात्रकों की अन्तर्राष्ट्रीय प्रणाली (System Internationsl Units, संक्षेप में S.I. Units) के उपयोग की सिफारिश की। इसमें छह आधारी मात्रक (basic units) तथा दो संपूरक मात्रक (supplementary units) होते हैं। इस प्रणाली के मात्रक SI मात्रक कहे जाते हैं। सन् 1970 में सातवाँ आधारी मात्रक 'मोल' जोड़ा गया।

S.I. प्रणाली के मूल मात्रक

S.I. प्रणाली में प्रयुक्त की गयी मूल राशियाँ तथा उनके मात्रक जो मूल मात्रक कहलाते हैं, निम्नलिखित हैं-

मूल राशियाँ	मूल मात्रक	संकेत
1. लम्बाई	मीटर	m
2. द्रव्यमान	किलोग्राम	kg
3. समय	सेकण्ड	s
4. ताप	केल्विन	K
5. विद्युतधारा	ऐम्पियर	A
6. ज्योति-तीव्रता	केन्डिला	cd
7. पदार्थ की मात्रा	मोल	mol

S.I. मात्रकों का विस्तृत विवरण निम्नवत् है-

(1) **मीटर (m)**– यह लम्बाई का मात्रक है। **1 मीटर वह दूरी है जिसमें शुद्ध क्रिप्टन-86 से उत्सर्जित होने वाली नारंगी प्रकाश की 1,650,763.73 तरंगें आती हैं।**

(2) **किलोग्राम (kg)**– यह द्रव्यमान का मात्रक है। **पेरिस में रखे प्लेटिनम-इरेडियम के एक विशेष टुकड़े का द्रव्यमान 1 किलोग्राम माना गया है। व्यवहार में 4°C पर 1 लीटर (अथवा 1000 सेमी^{3}) जल का द्रव्यमान 1 किलोगाम होता है। परमाणवीय स्केल पर कार्बन-12 (^{12}C) के 5.0188×10^{25} परमाणुओं का द्रव्यमान 1 किलोग्राम होता है।**

(3) **सेकण्ड (s)**– यह समय का मात्रक है। **1 सेकण्ड वह समयान्तराल है जिसमें परमाणु घड़ी** (atomic clock) **में सीजियम-133 परमाणु 9,192,631,770 कम्पन करता है।**

(4) **ऐम्पियर (A)**– यह विद्युतधारा का मात्रक है। **1 ऐम्पियर विद्युत धारा वह धारा है जो निर्वात में एक-दूसरे से 1 मीटर की दूरी पर स्थित दो सीधे अनन्त लम्बाई के समान्तर तारों में प्रवाहित किये जाने पर तारों के बीच प्रत्येक तार की प्रति मीटर लम्बाई पर 2×10^{-7} न्यूटन का बल उत्पन्न करती है।**

(5) **केल्विन** (K) – यह ताप का मात्रक है। **सामान्य वायुमण्डलीय दाब पर गलते हुए बर्फ के ताप तथा उबलते हुए जल के ताप के अन्तर के सौवें भाग को 1 केल्विन कहते हैं अथवा 1 केल्विन, जल के त्रिक बिन्दु (triple point) के ऊष्मागतिक ताप का $\frac{1}{273.16}$ वाँ भाग होता है।**

(6) **केन्डिला (cd)**– यह ज्योति-तीव्रता का मात्रक है। **1 केन्डिला, कृष्णिका (मानक स्रोत) के पृष्ठ के 1/600,000 मीटर^2 क्षेत्रफल की पृष्ठ के लम्बवत् दिशा में, ज्योति-तीव्रता है जबकि कृष्णिका का ताप प्लेटिनम के गलनांक के बराबर हो।**

(7) **मोल (mol)**– यह पदार्थ की मात्रा का मात्रक है। **1 मोल (mol) किसी पदार्थ की वह मात्रा है जिसमें उस पदार्थ के अवयवों (entities) की संख्या कार्बन [^{12}C] के 0.012 किग्रा में परमाणुओं की संख्या के बराबर है। [^{12}C के 0.012 किग्रा में परमाणुओं की संख्या को आवोगाद्रो नियतांक (Avogadro constant) कहते हैं तथा इसका मान 6.02×10^{23} है।]**

प्रश्न 5. S.I. प्रणाली में अन्य मात्रक प्रणालियों की अपेक्षा प्रमुख लाभों का वर्णन कीजिये।

उत्तर–S.I. प्रणाली में अन्य मात्रक प्रणालियों की अपेक्षा निम्नलिखित प्रमुख लाभ हैं-

(*i*) यह एक युक्तियुक्त प्रणाली (rational system) है। इस प्रणाली में एक भौतिक राशि का केवल एक मात्रक लिया जाता है, जैसे-

(*a*) M.K.S. प्रणाली में यान्त्रिक ऊर्जा का मात्रक 'जूल', ऊष्मीय ऊर्जा का 'किलो कैलोरी' तथा वैद्युत ऊर्जा का 'वाट-घण्टा है। किन्तु S.I. प्रणाली में सभी प्रकार की ऊर्जाओं का मात्रक 'जूल' है।

(*b*) M.K.S. प्रणाली में ताप का मात्रक °C, °F तथा 'केल्विन' है परन्तु S.I. प्रणाली में ताप का केवल एक ही मात्रक है जो 'केल्विन' है।

(*c*) M.K.S. प्रणाली में दाब के मात्रक 'बार', 'मीटर/सेकण्ड^2', वायुमण्डल', 'पास्कल' आदि हैं, लेकिन S.I. प्रणाली में दाब का केवल एक ही मात्रक 'पास्कल' है।

(*ii*) इस प्रणाली के मात्रक सदैव निरपेक्ष (absolute) होते हैं।

(*iii*) यह एक दाशमिक प्रणाली है। C.G.S. तथा M.K.S. प्रणाली के समान इसके अपवर्त्य और अपवर्तक दस की घात के रूप में व्यक्त किये जा सकते हैं जैसे- 1 किलोग्राम = 10^3 ग्राम, 1 माइक्रो-सेकण्ड = 10^{-6} सेकण्ड आदि।

(*iv*) यह एक सम्बद्ध प्रणाली है, जिसमें सभी व्युत्पन्न मात्रक मूल मात्रकों और पूरक मूल मात्रकों के केवल गुणा और भाग द्वारा प्राप्त किये जा सकते हैं।

(*v*) यह एक अन्तर्राष्ट्रीय प्रणाली है, जिसमें लगभग सभी व्युत्पन्न मात्रकों के नाम अन्तर्राष्ट्रीय स्तर पर स्वीकृत हैं।

प्रश्न 6. भौतिक राशियों की विमाओं से आप क्या समझते हैं? (2010)

उत्तर– भौतिक राशियों की विमायें (Dimensions of physical quantities)– व्युत्पन्न मात्रकों द्वारा व्यक्त की

जाने वाली सभी भौतिक राशियाँ सात मूल राशियों के संयोजन के पदों में प्रस्तुत की जा सकती हैं। इसके लिए मूल राशियों के मात्रकों (अर्थात मूल मात्रकों) पर कुछ घातें चढ़ानी पड़ती हैं।

"किसी भौतिक राशि का व्युत्पन्न मात्रक प्राप्त करने के लिए मूल मात्रकों पर जो घातें (powers) चढ़ाई जाती हैं, उन्हें उस भौतिक राशि की विमाएँ कहते हैं।"

उदाहरणार्थ– $\text{सामर्थ्य} = \dfrac{\text{कार्य}}{\text{समय}} = \dfrac{\text{बल} \times \text{दूरी}}{\text{समय}}$

$$= \frac{(\text{द्रव्यमान} \times \text{त्वरण}) \times \text{दूरी}}{\text{समय}}$$

अत: सामर्थ्य का मात्रक

$$= \frac{(\text{किग्रा} \times \text{मीटर} - \text{सेकण्ड}^{-2}) \times \text{मीटर}}{\text{सेकण्ड}}$$

$= \text{किग्रा} - \text{मीटर}^2 - \text{सेकण्ड}^{-3}$

अत: सामर्थ्य का व्युत्पन्न मात्रक प्राप्त करने के लिये द्रव्यमान के मूल मात्रक किग्रा पर 1, लम्बाई के मूल मात्रक मीटर पर 2 तथा समय के मूल मात्रक सेकण्ड पर –3 घात चढ़ाई गई हैं। इसलिए सामर्थ्य की द्रव्यमान में विमा 1, लम्बाई में 2 तथा समय में –3 हैं।

जिन मूल राशियों के मात्रक इस व्युत्पन्न मात्रक में नहीं आ रहे हैं उनमें इस भौतिक राशि (सामर्थ्य) की विमाएँ शून्य कही जाती हैं। अत: सामर्थ्य, ताप, ज्योति-तीव्रता, वैद्युत धारा आदि में विमाएँ शून्य हैं।

प्रश्न 7. विमीय सूत्र तथा विमीय समीकरण को समझाइये? (2012)

उत्तर–विमीय सूत्र तथा विमीय समीकरण (Dimensional formula and Dimensional equation)–मूल राशियों लम्बाई, द्रव्यमान, समय, ताप, वैद्युत धारा, ज्योति तीव्रता तथा पदार्थ की मात्रा के विमीय संकेत, क्रमश: $[L]$, $[M]$, $[T]$, $[\theta]$, $[A]$, $[cd]$ तथा [mol] हैं। यहाँ गुरु कोष्ठक [ ] लगाने का अर्थ है कि जिस राशि पर यह लगा है हम उस राशि की विमा पर विचार कर रहे हैं।

"किसी दी हुई भौतिक राशि का विमीय सूत्र वह संकेतात्मक व्यंजक है जो यह दर्शाता है कि उस भौतिक राशि में किस मूल राशि की कितनी विमाएँ हैं।"

यान्त्रिकी में, सभी भौतिक राशियों की विमाओं को $[L]$, $[M]$ और $[T]$ के पदों में व्यक्त किया जा सकता है। उदाहरणार्थ– किसी वस्तु द्वारा घेरा गया आयतन उसकी लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई अथवा तीनों लम्बाइयों के गुणन द्वारा व्यक्त किया जाता है। इसलिए, आयतन का विमीय सूत्र $= [L] \times [L] \times [L] = [L]^3$ या $[L^3]$। क्योंकि आयतन, द्रव्यमान और समय पर निर्भर नहीं करता। अत: इसके विमीय सूत्र को $[M^0L^3T^0]$ भी लिखा जा सकता है। इसलिए यह कहा जाता है कि आयतन में द्रव्यमान की शून्य विमा $[M^0]$, समय की शून्य विमा $[T^0]$ तथा लम्बाई की 3 विमाएँ $[L^3]$ हैं।

इस प्रकार विभिन्न भौतिक राशियों के विमीय सूत्र अग्र प्रकार प्राप्त किये जाते हैं–

1. कार्य (Work) $= \text{बल} \times \text{विस्थापन}$ $= [MLT^{-2}] \times [L] = [ML^2T^{-2}]$
2. सामर्थ्य या शक्ति (Power) $= \dfrac{\text{कार्य}}{\text{समय}}$ $= \dfrac{[ML^2T^{-2}]}{[T]} = [ML^2T^{-3}]$
3. गतिज ऊर्जा (Kinetic Energy) $= \dfrac{1}{2}(\text{द्रव्यमान}) \times (\text{वेग})^2$ $= [M][LT^{-1}]^2 = [ML^2T^{-2}]$
4. गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा (Gravitational Potential Energy) $= \text{द्रव्यमान} \times \text{गुरुत्वीय त्वरण} \times \text{दूरी}$ $= [M][LT^{-2}][L] = [ML^2T^{-2}]$
5. गुरुत्वीय विभव (Gravitational Potential) $= \dfrac{\text{प्राप्त कार्य}}{\text{द्रव्यमान}}$ $= \dfrac{[ML^2T^{-2}]}{[M]} = [L^2T^{-2}]$
6. रेखीय संवेग (Momentum) $= \text{द्रव्यमान} \times \text{वेग}$ $= [M] \times [LT^{-1}] = [MLT^{-1}]$
7. आवेग (Impulse) $= \text{बल} \times \text{समय}$ $= [MLT^{-2}] \times [T] = [MLT^{-1}]$

8. प्रतिबल (Stress) $= \dfrac{\text{बल}}{\text{क्षेत्रफल}}$ $= \dfrac{[MLT^{-2}]}{[L^2]} = [ML^{-1}T^{-2}]$

9. विकृति (Strain) $= \dfrac{\text{लम्बाई में वृद्धि}}{\text{प्रारम्भिक लम्बाई}}$ $= \dfrac{[L]}{[L]} = [L^0]$ विमाहीन राशि

10. प्रत्यास्थता गुणांक (Modulus of Elasticity) $= \dfrac{\text{प्रतिबल}}{\text{विकृति}}$ $= \dfrac{[ML^{-1}T^{-2}]}{[L^0]} = [ML^{-1}T^{-2}]$

11. पृष्ठ तनाव (Surface Tension) $= \dfrac{\text{बल}}{\text{लम्बाई}}$ $= \dfrac{[MLT^{-2}]}{[L]} = [MT^{-2}]$

12. बल-आघूर्ण (Torque) = बल × दूरी $= [MLT^{-2}] \times [L] = [ML^2T^{-2}]$

13. स्प्रिंग का बल नियतांक $= \dfrac{\text{आरोपित बल}}{\text{लम्बाई में परिवर्तन}}$ $= \dfrac{[MLT^{-2}]}{[L]} = [MT^{-2}]$

(Force Constant of Spring)

14. आवृत्ति (Frequency) $= \dfrac{1}{\text{आवर्तकाल}}$ $= \dfrac{1}{[T]} = [T^{-1}]$

15. कोण (Angle) (रेडियन में) $= \dfrac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}}$ $= \dfrac{[L]}{[L]} = [L^0]$ विमाहीन राशि

किसी भौतिक राशि को उसके विमीय सूत्र के बराबर लिखने पर प्राप्त समीकरण को उस राशि का विमीय समीकरण कहते हैं। अत: विमीय समीकरण वह समीकरण है जिसमें किसी भौतिक राशि को मूल राशियों और उनकी विमाओं के पदों में निरूपित किया जाता है।

उदाहरणार्थ- आयतन $[V]$, चाल $[v]$, बल $[F]$ और द्रव्यमान घनत्व $[\rho]$ की विमीय समीकरण को निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है-

$$[V] = [M^0 L^3 T^0]$$
$$[v] = [M^0 L T^{-1}]$$
$$[F] = [MLT^{-2}]$$
$$[\rho] = [ML^{-3} T^0]$$

प्रश्न 8. विमाओं के समांगीयता का सिद्धान्त समझाते हुए विमीय समीकरण के अनुप्रयोगों की व्याख्या कीजिये। (2012| 2015)

उत्तर– विमाओं के समांगीयता का सिद्धान्त– समीकरणों के समांगीयता का सिद्धान्त (Principle of homogeneity) विमीय विश्लेषण का मूल आधार है। इसके अनुसार, वही भौतिक राशियाँ संकलित या व्यवकलित की जा सकती हैं जिनकी विमाएँ समान हैं। अत: किसी विमीय समीकरण के प्रत्येक पद की विमाएँ समान होती है। दूसरे शब्दों में, इसको इस प्रकार भी कहा जा सकता है कि किसी गणितीय समीकरण के दोनों पक्षों में आने वाली प्रत्येक समान मूल राशि की विमाएँ समान होनी चाहिए।

विमीय विश्लेषण का व्यापक ज्ञान, विभिन्न भौतिक राशियों के बीच सम्बन्धों के निगमन में सहायता करता है और विभिन्न गणितीय व्यंजकों की व्युत्पति, यथार्थता तथा विमीय समांगता की जाँच करने में सहायक है।

विमीय समीकरण के अनुप्रयोग– विमीय समीकरण के अनुप्रयोग निम्नलिखित हैं–

(1) सूत्र अथवा समीकरणों की सत्यता की जाँच करना– इसके लिए जिस सूत्र या समीकरण की सत्यता की जाँच करनी होती है, उसके दोनों पक्षों के विमीय सूत्र लिखकर उनमें एक प्रकृति की राशियों की विमाओं की तुलना करते हैं। तुलना करने पर यदि समीकरण के दोनों ओर की राशियों की विमाएँ बिल्कुल एक-सी हैं तो समीकरण ठीक (यथार्थ) है अन्यथा नहीं।

(2) विभिन्न भौतिक राशियों के बीच सम्बन्ध स्थापित करना– यदि किसी भौतिक राशि के विषय में यह ज्ञात है कि वह किन-किन राशियों पर निर्भर करती है तो हम उन राशियों की विमा लिखकर उनके बीच सम्बन्ध स्थापित कर सकते हैं।

(3) विमीय मात्रक ज्ञात करना–भौतिकी के किसी विमीय सूत्र में आयी मूल राशियों के विमीय संकेतों के स्थान पर उनके मूल मात्रक लिखने पर भौतिक राशि का जो मात्रक प्राप्त होता है वह उस भौतिक राशि का विमीय मात्रक **कहलाता है।**

(4) मात्रकों का एक पद्धति से दूसरी पद्धति में रूपान्तरण– हम जानते हैं कि किसी भौतिक राशि के आंकिक मान तथा संगत मात्रक का गुणनफल एक नियतांक होता है। यदि किसी भौतिक राशि Q के आंकिक मान दो अलग-अलग मात्रक पद्धतियों के अनुसार n_1 व n_2 हों तथा उनके मात्रक क्रमशः u_1 व u_2 हों, तब

$$Q = n_1[u_1] = n_2[u_2] \qquad ...(1)$$

यदि इस भौतिक राशि की द्रव्यमान में विमा a, लम्बाई में विमा b तथा समय में विमा c है, तो इसका सूत्र $[M^a L^b T^c]$ होगा। अब यदि पहली पद्धति में मूल मात्रक क्रमशः M_1, L_1 व T_1 हों तो इस पद्धति में मात्रक

$$Q = n_1 [M_1^a L_1^b T_1^c]$$

इसी प्रकार, यदि दूसरी पद्धति में मूल मात्रक क्रमशः M_2, L_2 व T_2 हों, तो इस पद्धति में मात्रक

$$Q = n_2 [M_2^a L_2^b T_2^c]$$

समीकरण (1) के अनुसार

$$n_1[M_1^a L_1^b T_1^c] = n_2[M_2^a L_2^b T_2^c]$$

या $$n_2 = n_1\left(\frac{M_1}{M_2}\right)^a\left(\frac{L_1}{L_2}\right)^b\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^c \qquad ...(2)$$

समीकरण (2) के द्वारा किसी भी भौतिक राशि के आंकिक मान को मात्रकों की एक पद्धति से दूसरी पद्धति में बदल सकते हैं अर्थात् इसके मात्रकों को एक पद्धति से दूसरी पद्धति में बदल सकते हैं।

प्रश्न 9. गुरुत्वीय त्वरण 'g' का मान 9.8 मी./से.^{2} है। यदि लम्बाई का मात्रक किलोमीटर तथा समय का मात्रक मिनट मान लिया जाये तो विमीय विश्लेषण विधि से 'g' का मान नये मात्रकों में ज्ञात कीजिये।

उत्तर– गुरुत्वीय त्वरण का विमीय सूत्र $= [LT^{-2}] = [M^0 L T^{-2}]$

$\therefore$ इसकी द्रव्यमान में विमा $a = 0$, लम्बाई में विमा $b = 1$ तथा समय में विमा $c = -2$ है।

$n_1 = 9.8$; $L_1 =$ मीटर, $T_1 =$ सेकण्ड ;

$L_2 =$ किमी, $T_2 =$ मिनट

$\therefore$ सूत्र $n_2 = n_1\left[\frac{M_1}{M_2}\right]^a\left[\frac{L_1}{L_2}\right]^b\left[\frac{T_1}{T_2}\right]^c$ में मान रखने पर,

$$n_2 = 9.8\left[\frac{M_1}{M_2}\right]^0\left[\frac{\text{मीटर}}{\text{किमी}}\right]^1\left[\frac{\text{सेकण्ड}}{\text{मिनट}}\right]^{-2}$$

$$= 9.8[1]\left[\frac{\text{मीटर}}{1000\,\text{मीटर}}\right]^1\left[\frac{\text{सेकण्ड}}{60\ \text{सेकण्ड}}\right]^{-2}$$

$$= 9.8\times\left(\frac{1}{1000}\right)\times\left(\frac{1}{60}\right)^{-2}$$

$$= \frac{9.8\times60\times60}{1000} = 35.3$$

अतः **नये मात्रकों में g का मान 35.3 किमी/मिनट^2 होगा।**

प्रश्न 10. विमा की रीति से सूत्र $v = u + at$ की सत्यता की जाँच कीजिए जबकि चिन्हों के सामान्य अर्थ हैं।

उत्तर– दिये गये सूत्र $v = u + at$ में–

अन्तिम वेग v का विमीय सूत्र $= [LT^{-1}]$,

प्रारम्भिक वेग u का विमीय सूत्र $= [LT^{-1}]$

त्वरण a का विमीय सूत्र $= [LT^{-2}]$, समय t का विमीय सूत्र $= [T]$

अतः इनको दिये गये सूत्र में रखने पर

$$[LT^{-1}] = [LT^{-1}] + [LT^{-2}][T] = [LT^{-1}] + [LT^{-1}]$$

चूँकि दोनों पक्षों में प्रत्येक पद की विमा एक-सी हैं अथवा दोनों पक्षों में L तथा T की घातें (विमाएँ) पृथक्-पृथक् एक-सी हैं, अतः सूत्र सत्य है।

प्रश्न 11. किसी माध्यम में अनुदैर्ध्य तरगों (ध्वनि तरंगों) की चाल v, माध्यम के प्रत्यास्थता गुणांक E तथा घनत्व d पर निर्भर करती हैं। विमीय विधि से v, E, d में सम्बन्ध का सूत्र ज्ञात कीजिए।

उत्तर– माना चाल v, प्रत्यास्थता गुणांक E की घात a तथा घनत्व d की घात b पर निर्भर करती है।

अतः $v \propto E^a d^b = K E^a d^b$ ... (1)

जहाँ K एक विमाहीन नियतांक है।

समी० (1) की दोनों ओर की विमाएँ लिखने पर

$$[LT^{-1}] = [ML^{-1}T^{-2}]^a [ML^{-3}]^b$$

$$[M^0L^1T^{-1}] = [M^{a+b}][L^{-a-3b}][T^{-2a}]$$

समीकरणों के विमीय सन्तुलन के लिए दोनों ओर M, L तथा T की विमाएँ पृथक्-पृथक् बराबर होनी चाहिए।

$\therefore \quad a + b = 0$ ... (2)

$-a - 3b = 1$ ... (3)

$-2a = -1$ ... (4)

समी० (4) से $a = 1/2$ तथा यह मान समी० (2) में रखने पर $\frac{1}{2} + b = 0$ या $b = -\frac{1}{2}$

अतः a तथा b के मान उपर्युक्त समी० (1) में रखने पर

$$v = K E^{1/2} d^{-1/2} = K (E/d)^{1/2}$$

या $\quad v = K\sqrt{E/d}$

विमीय विश्लेषण से K के मान का ज्ञान नहीं होता है। प्रयोगों के आधार पर $K = 1$

अतः $u = \sqrt{(E/d)}$ (यही अभीष्ट सूत्र होगा।)

प्रश्न 12. विमीय विश्लेषण की सीमाओं (Limitations) का उल्लेख कीजिए। (2010, 2011)

उत्तर– विमीय विश्लेषण की सीमाएं (Limitations of Dimensional Analysis)–

(*i*) परस्पर सम्बन्धित राशियों के बीच सम्बन्ध व्युत्पन्न करने के लिए विमीय विश्लेषण काफी उपयोगी है। तथापि सूत्रों में आये विमाहीन स्थिरांकों के मान इस विधि द्वारा ज्ञात नहीं किए जा सकते।

(*ii*) यदि कोई यान्त्रिक भौतिक राशि तीन से अधिक यान्त्रिक भौतिक राशियों पर निर्भर करती है, तो विश्लेषण विधि से उनके बीच सम्बन्ध स्थापित नहीं किया जा सकता क्योंकि M, L तथा T की घातों की तुलना करने से केवल तीन समीकरण ही प्राप्त होती हैं तथा उनसे तीन घातों के ही मान ज्ञात किये जा सकते हैं।

(*iii*) इस विधि से त्रिकोणमितीय ($\sin\theta, \cos\theta, \ldots$), चरघातांकी (exponential) तथा लघुगुणकीय ($\log x$) आदि पद वाले समीकरणों का विश्लेषण नहीं किया जा सकता।

(*iv*) इस विधि से ऐसे सूत्रों की स्थापना नहीं की जा सकती है जिसमें विभिन्न पद परपस्पर (+) अथवा (–) चिन्हों से सम्बन्धित हों। उदाहरणार्थ– $v = u + at$, $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ आदि।

प्रश्न 13. किसी वृत्तीय कक्षा में परिभ्रमण करने वाले कण पर लगने वाला अभिकेन्द्र बल (F), कण के द्रव्यमान (m), वृत्त की त्रिज्या (r) तथा कण की चाल (v) पर निर्भर करता है। विमीय विश्लेषण विधि से अभिकेन्द्र बल (F) के लिए सूत्र की स्थापना कीजिए।

उत्तर– माना अभिकेन्द्र बल (F), द्रव्यमान m की घात a, त्रिज्या r की घात b तथा चाल v की घात c पर निर्भर करता है।

अतः $\quad F \propto m^a r^b v^c$

अथवा $\quad F = K m^a r^b v^c$ ...(1)

यहाँ K = विमाहीन समानुपाती नियतांक; समी० (1) को विमीय रूप में लिखने पर

$$[MLT^{-2}] = [M^a][L^b][LT^{-1}]^c$$
$$= [M^a L^{b+c} T^{-c}]$$

दोनों पक्षों में M, L तथा T की घातों की तुलना करने पर $a = 1$, $b + c = 1$ तथा $-c = -2$

इन समीकरणों को हल करने पर

$a = 1$, $b = -1$, $c = 2$

a, b तथा c के मान समी० (1) में रखने पर

$$F = K m^1 r^{-1} v^2 = K\left(\frac{mv^2}{r}\right)$$

प्रयोग के आधार पर $K = 1$; अतः $F = \left(\frac{mv^2}{r}\right)$

(यही अभीष्ट सूत्र है।)

प्रश्न 14. m द्रव्यमान का एक पिण्ड स्प्रिंग के एक सिरे से लटका हुआ सरल आवर्तगति करता है। स्प्रिंग का बल नियतांक K तथा पिण्ड का दोलन काल T है। विमीय विधि से सिद्ध कीजिये कि $T = (2\pi\, m/k)$ समीकरण अशुद्ध है। विमीय विधि से इसका सही रूप भी स्थापित कीजिये।

उत्तर– दी हुई समीकरण $T = (2\pi\, m/k)$ को विमीय रूप में लिखने पर

$$T = [M]/[MT^{-2}] = [T^2]$$

($\because 2\pi$ एक विमाहीन नियतांक है)

चूँकि दोनों पक्षों की विमा समान नहीं हैं, अत: समीकरण अशुद्ध है।

माना दोलन काल T, द्रव्यमान m की घात a तथा बल नियतांक k की घात b पर निर्भर करता है।

$$\therefore \quad T \propto m^a k^b \text{ या } T = K\, m^a k^b$$

जहाँ K, एक विमाहीन समानुपाती नियतांक है, जो 2π दिया है।

अत: $$T = 2\pi\, m^a k^b \quad \ldots(1)$$

समी० (1) को विमीय रूप में लिखने पर

$$[T] = [M]^a\, [MT^{-2}]^b$$

या $$[M^0 T] = [M^{a+b}]\, [T^{-2b}]$$

दोनों पक्षों में M तथा T की घातों की तुलना करने पर

$$a + b = 0 \text{ तथा } -2b = 1$$

इन समीकरणों को हल करने पर $b = -1/2$ तथा $a = 1/2$

a तथा b के मान समी० (1) में रखने पर

$$T = 2\pi\, m^{1/2}\, k^{-1/2} = 2\pi\, (m/k)^{1/2}$$

अथवा $T = 2\pi\sqrt{\left(\frac{m}{k}\right)}$ **(यही सही रूप है।)**

प्रश्न 15. मान में होने वाली त्रुटियां की विवेचना कीजिये। (2014)

उत्तर– मान में त्रुटियां (Errors in measurement)– सामान्यत: सभी भौतिक राशि की माप के लिए ज्ञात किये गये प्रेक्षण में कुछ न कुछ अनिश्चित (uncertainty) अवश्य ही रहती है। इसी अनिश्चितता को त्रुटि कहते हैं। इन्हीं त्रुटियों के कारण प्राप्त मान यथार्थ मान से थोड़ा भिन्न होता है। मापी गई भौतिक राशि को शत-प्रतिशत यथार्थ (exact) नहीं कहा जा सकता है। भौतिक राशि के प्रेक्षित मान (observed value) तथा यथार्थ मान (exact value) का अन्तर ही त्रुटि का मान होता है।

मापन में उत्पन्न त्रुटियों को निम्नलिखित तीन वर्गों में बाँटा गया है–

(1) क्रमबद्ध त्रुटियाँ (systematic errors), (2) यादृच्छिक त्रुटियाँ (random errors) तथा (3) स्थूल त्रुटियाँ (gross errors)।

(1) क्रमबद्ध त्रुटियाँ (Systematic errors)– इस प्रकार की त्रुटियों का कारण ज्ञात होता है। अत: इन त्रुटियों के मान में कमी लायी जा सकती है। ये निम्नलिखित चार प्रकार की होती हैं–

***(i)* यन्त्रों के कारण त्रुटि–** ये त्रुटियाँ उपकरण या यन्त्र की संरचना, बनावट अथवा निर्माण के कारण उत्पन्न होती हैं। इन त्रुटियों को यन्त्रों में उच्च गुणवत्ता लाकर दूर किया जा सकता है।

***(ii)* व्यक्तिगत त्रुटि (Personal Errors) –** यह त्रुटि प्रेक्षण लेने वाले प्रेक्षक की लापरवाही या अनुभवहीनता के कारण उत्पन्न होती है।। जैसे- उपकरण को सही समंजित न कर पाना, असावधानी से पाठ्यांक लेना इत्यादि।

***(iii)* पूर्णस्थता की कमी से त्रुटि (Error due to Imperfection) –** वे त्रुटियाँ जिनके उत्पन्न होने के कारण ज्ञात होते हुये भी जिन्हें दूर नहीं किया जा सकता, पूर्णस्थता की कमी या अपूर्णता के कारण त्रुटि कहलाती है।

***(iv)* बाह्य कारकों के कारण त्रुटि (Error due to External Factors) –** प्रयोग के प्रेक्षण लिये जाते समय बाह्य कारक, जैसे- वायुमण्डलीय ताप, दाब, आर्द्रता आदि में परिवर्तन होने पर प्रेक्षण में त्रुटि उत्पन्न होगी। इस प्रकार की त्रुटि को न्यूनतम करने के लिये बाह्य कारकों के प्रभावों को न्यूनतम करने के लिये तदनुरूप संशोधन करने चाहिये।

(2) यादृच्छिक या आकस्मिक त्रुटियाँ (Random Errors)– इस प्रकार की त्रुटियों का कारण ज्ञात नहीं रहता है परन्तु सांख्यिकीय विधि (statistical method) से इसकी विवेचना की जा सकती है। उदाहरण के लिए, एक पिन विधि से उत्तल लेंस की फोकस दूरी मापने पर सभी पाठ्यांक एक समान नहीं आते हैं। इस त्रुटि को सांयोगिक त्रुटि कहा जाता है। इस प्रकार की त्रुटियों को कम करने के लिये एक ही प्रेक्षण बार-बार लेते हैं। यदि लिये गये प्रेक्षणों की संख्या n गुना बढ़ा दें तो ये त्रुटियाँ $1/n$ गुना कम हो जाती हैं।

माना किसी भौतिक राशि का मापन करने हेतु लिये गये प्रेक्षण क्रमशः $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$ हैं तो मापन की इस स्थिति में भौतिक राशि का शुद्ध मान इनके समान्तर माध्य (arithmetic mean) के तुल्य होता है।

$$\therefore a_{\text{माध्य}} = \bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n}{n}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

$\bar{a}$ को अधिकतम संभाव्य मान most probable value) कहा जाता है। यह मापी गयी राशि के यथार्थ मान से थोड़ा भिन्न अवश्य होता है।

यदि उपरोक्त मापित राशि का यथार्थ मान a हो तो $(a_1 - a), (a_2 - a), \ldots, (a_n - a)$ क्रमशः प्रेक्षणों की सांयोगिक त्रुटियाँ होंगी।

सांयोगिक त्रुटियों के धनात्मक तथा ऋणात्मक होने की सम्भावना समान होती है तथा प्रेक्षणों का समान्तर माध्य (arithmetic mean) लेने पर त्रुटि बहुत कुछ कम हो जाती है।

(3) स्थूल त्रुटियाँ (Gross Errors)– ये त्रुटियाँ प्रेक्षक की असावधानी के कारण होती हैं। सम्भावित असावधानियाँ निम्नलिखित हो सकती हैं-

(*i*) पाठ्यांक लिखते समय त्रुटिपूर्ण पाठ्यांक लिखना।

(*ii*) गणना सम्बन्धी त्रुटियाँ करना।

(*iii*) त्रुटि के कारणों को ध्यान में रखते हुये प्रेक्षण लेना।

(*iv*) बिना उपकरण को समंजित किये यन्त्र से पाठ्यांक लेना।

प्रश्न 16. मापन यन्त्रों की यथार्थता एवं परिशुद्धता से आप क्या समझते हैं?

उत्तर– यथार्थता तथा मापक यन्त्रों की परिशुद्धता (Accuracy and Precision of Measuring Instruments)– मापन समस्त प्रायोगिक विज्ञान एवं प्रौद्योगिकी का आधार है। किसी भी मापक-यन्त्र द्वारा ज्ञात किये गये सभी मापन के परिमाणों में कुछ न कुछ अनिश्चितता अवश्य ही रह जाती है। यह अनिश्चितता ही माप में त्रुटि (error) कहलाती है। प्रत्येक परिकलित राशि, जो मापित मानों पर आधारित होती है, में भी कुछ त्रुटि होती है। यहाँ दो तकनीकी शब्दों यथार्थता (accuracy) तथा परिशुद्धता (precision) में अन्तर समझ लेना आवश्यक है। **किसी माप की यथार्थता वह मान है जो यह बताता है कि किसी राशि का मापा गया मान उसके वास्तविक मान के कितना निकट है जबकि परिशुद्धता यह बताती है कि वह राशि किस विभेदन या सीमा तक मापी गयी है।**

उदाहरण के लिए, माना कि किसी लम्बाई का वास्तविक मान 3.678 cm है। एक प्रयोग में 0.1 cm विभेदन का मापक-यन्त्र प्रयोग करके इसका मान 3.5 cm मापा गया, जबकि दूसरे प्रयोग में अधिक विभेदन वाला (माना 0.01 cm) मापक-यन्त्र प्रयोग करके उसी लम्बाई को 3.38 cm मापा गया। यहाँ पहला माप अधिक यथार्थ है (क्योंकि वास्तविक मान के निकट है) परन्तु कम परिशुद्ध है (क्योंकि इसका विभेदन केवल 0.1 cm है।) जबकि दूसरा माप कम यथार्थ परन्तु अधिक परिशुद्ध है।

वस्तुओं की ठीक माप-तौल करने में हम अनेक प्रकार के मापक-यन्त्रों; जैसे- मीटर स्केल, स्क्रूगेज आदि का प्रयोग करते हैं। प्रत्येक मापक-यन्त्र से मापी गयी भौतिक राशि की माप एक सीमा (limit) तक ही यथार्थ (accurate) होती है चाहे हम उसे कितने ही ध्यानपूर्वक क्यों न मापें तथा उपकरण कितनी भी ऊँची परिशुद्धता (precision) का क्यों न हो। उदाहरण के लिए, मान लीजिए किसी छड़ की लम्बाई साधारण पैमाने से मापने पर 12.4 सेमी से कुछ अधिक तथा 12.5 सेमी. से कुछ कम आती है। पैमाने पर लगे चिन्हों से हम इसका मान 12.4 सेमी. अथवा 12.5 सेमी. ही पढ़ सकते हैं। अतः छड़ के उस भाग की लम्बाई जो इन दो चिन्हों (12.4 व 12.5) के बीच में है, हम ठीक-ठीक ज्ञात नहीं कर सकते। छड़ की वास्तविक लम्बाई 12.4 से 12.5 सेमी के बीच कुछ भी हो सकती हैं। अतः माप में अनिश्चितता (uncertainty) $12.5 \sim 12.4 = \pm 0.1$ सेमी है। दूसरे शब्दों में, इस पैमाने की यथार्थता की सीमा सेमी में दशमलव के बाद केवल 1 स्थान तक अर्थात् 0.1 सेमी. है। यही साधारण पैमाने की अल्पतमांक (least count) है। उपर्युक्त छड़ की लम्बाई को अधिक यथार्थता से मापने के लिए हमें अधिक सुग्राही (sensitive) मापक-यन्त्र (जैसे- वर्नियर कैलीपर्स) का प्रयोग करना होगा। वर्नियर कैलीपर्स का अल्पतमांक सामान्यतः 0.01 सेमी. होता है। अतः इससे छड़ की लम्बाई सेमी में दशमलव के बाद दो स्थानों तक यथार्थता से मापी जा सकती है। इस प्रकार वर्नियर कैलीपर्स की यथार्थता की सीमा 0.01 सेमी है। अतः **किसी यन्त्र द्वारा जिस सीमा तक यथार्थ मापन किया जा सकता है, वह उसकी 'यथार्थता**

की सीमा' (limit of accuracy) कहलाती है तथा यह यन्त्र की अल्पतमांक द्वारा निर्धारित होती है।

प्रश्न 17. माध्य निरपेक्ष त्रुटि, आपेक्षित त्रुटि एवं प्रतिशत त्रुटि की व्याख्या कीजिये।

उत्तर– माध्य निरपेक्ष त्रुटि (Mean Absolute Error)– क्योंकि हमें किसी राशि का वास्तविक मान ज्ञात करने की कोई विधि ज्ञात नहीं है इसीलिए राशि के विभिन्न प्रेक्षित मानों के समान्तर माध्य को ही राशि का वास्तविक मान, लेते हैं।

किसी राशि के व्यक्तिगत और वास्तविक माप के बीच के अन्तर के परिणाम को मापन की निरपेक्ष त्रुटि कहते हैं। इसको $|\Delta a|$ द्वारा प्रदर्शित करते हैं। इस प्रकार हमारी व्यक्तिगत प्रेक्षित माप में वास्तविक माप से निरपेक्ष त्रुटियाँ निम्न प्रकार होंगी।

$$\Delta a_1 = a_1 - a_{\text{माध्य}}$$
$$\Delta a_2 = a_2 - a_{\text{माध्य}}$$
$$\Delta a_3 = a_3 - a_{\text{माध्य}}$$
$$\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta a_n = a_n - a_{\text{माध्य}}$$

उपरोक्त प्रकार से परिकलित Δa का मान कुछ प्रेक्षणों के लिए धनात्मक हो सकता है तथा कुछ प्रेक्षणों के लिए ऋणात्मक परन्तु निरपेक्ष त्रुटि $|\Delta a|$ सदैव धनात्मक ही ली जाती है।

भौतिक राशि की निरपेक्ष त्रुटियों के परिमाणों के समान्तर माध्य को भौतिक राशि की माध्य त्रुटि कहा जाता है। इसको $\Delta a_{\text{माध्य}}$ से प्रदर्शित करते हैं।

$$\therefore \Delta a_{\text{माध्य}} = \frac{|\Delta a_1| + |\Delta a_2| + |\Delta a_3| + \ldots + |\Delta a_n|}{n}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta a_i$$

इस प्रकार किसी एकल माप का मान $a = a_{\text{माध्य}}$ [$\pm \Delta a$ माध्य]

इसका अर्थ है कि भौतिक राशि की किसी माप 'a' का मान ($a_{\text{माध्य}} + \Delta a_{\text{माध्य}}$) तथा ($a_{\text{माध्य}} - \Delta a_{\text{माध्य}}$) के बीच होने की सम्भावना है।

आपेक्षिक त्रुटि (Relative Error)– मापित राशि की माध्य निरपेक्ष त्रुटि $\Delta a_{\text{माध्य}}$ तथा इसके माध्यमान $a_{\text{माध्य}}$ का अनुपात आपेक्षिक त्रुटि कहलाता है।

$$\therefore \text{ आपेक्षिक त्रुटि } \delta a = \frac{\Delta a_{\text{माध्य}}}{a_{\text{माध्य}}}$$

प्रतिशत त्रुटि (Percentage Error)– आपेक्षिक त्रुटि को प्रतिशत त्रुटि में व्यक्त करने पर इसको प्रतिशत त्रुटि कहा जाता है।

अत: प्रतिशत त्रुटि = आपेक्षिक त्रुटि × 100%

$$\therefore \text{ प्रतिशत त्रुटि } = \left(\frac{\Delta a_{\text{माध्य}}}{a_{\text{माध्य}}}\right) \times 100\%$$

प्रश्न 18. योग एवं अन्तर संक्रिया में त्रुटियों के संयोजन (Combination of errors) को समझाइये।

उत्तर– योग (संकलन) संक्रिया में त्रुटियों का संयोजन– माना दो मापित राशियाँ a व b के मापित मान क्रमश: $(a \pm \Delta a)$ तथा $(b \pm \Delta b)$ हैं, जहाँ Δa तथा Δb क्रमश: a तथा b के मान में निरपेक्ष त्रुटियाँ हैं। माना हमें z के परिकलित मान में निरपेक्ष त्रुटि Δz ज्ञात करनी है जबकि $z = a + b$

$$\therefore \quad z \pm \Delta z = (a \pm \Delta a) + (b \pm \Delta b)$$
$$z \pm \Delta z = a \pm \Delta a + b \pm \Delta b$$
$$z \pm \Delta z = (a + b) \pm \Delta a \pm \Delta b$$
$$z \pm \Delta z = z \pm \Delta a \pm \Delta b \ (\because z = a = b)$$
$$\pm \Delta z = \pm \Delta a \pm \Delta b$$

यहाँ Δz के चार सम्भव मान $(+\Delta a + \Delta b)$, $(-\Delta a - \Delta b)$ $(+\Delta a - \Delta b)$ Sjeb $(-\Delta a + \Delta b)$ होंगे।

इस प्रकार z के मान में अधिकतम निरपेक्ष त्रुटि

$$\Delta z = (\Delta a + \Delta b)$$

इस प्रकार z के मान में अधिकतम निरपेक्ष सम्भव त्रुटि a तथा b के मान में अधिकतम निरपेक्ष त्रुटियों के योग के बराबर होती हैं।

अन्तर (व्यवकलन) संक्रिया में त्रुटियों के संयोजन

यदि $z = (a - b)$ तो

$$z \pm \Delta z = (a \pm \Delta a) - (b \pm \Delta b)$$
$$z \pm \Delta z = (a - b) \pm \Delta a \pm \Delta b$$
$$\therefore \quad \pm \Delta z = \pm \Delta a \pm \Delta b \ (\because z = a - b)$$

अत: Δz के चार सम्भव मान क्रमश: $(+\Delta a - \Delta b)$; $(+\Delta a - \Delta b)$, $(-\Delta a + \Delta b)$ तथा $(-\Delta a - \Delta b)$ हैं।

$\therefore z$ के परिकलित मान में अधिकतम निरपेक्ष त्रुटि $\Delta z = \Delta a + \Delta b$

अत: **व्यवकलन की क्रिया में भी परिकलित मान में अधिकतम निरपेक्ष त्रुटि प्रेक्षित राशियों के मानों में**

अधिकतम निरपेक्ष त्रुटियों के योगफल के बराबर होती है। इसी प्रकार अधिकतम प्रतिशत त्रुटि

$$\left(\frac{\Delta z}{z}\times 100\right)=\left(\frac{\Delta a}{a}\times 100\right)+\left(\frac{\Delta b}{b}\times 100\right)$$

प्रश्न 19. गुणा एवं भाग की संक्रिया में त्रुटियों के संयोजन को स्पष्ट कीजिये।

उत्तर– गुणा संक्रिया में त्रुटियों का संयोजन–

यदि $z = a \times b$ तो

$$(z+\Delta z) = (a \pm \Delta a)\times(b \pm \Delta b)$$

$$= ab \pm a\,\Delta b \pm b\Delta a \pm \Delta a\,\Delta b$$

Δa व Δb अल्प राशियाँ हैं, अत: इनके गुणनफल $\Delta a\,\Delta b$ को नगण्य मानकर छोड़ा जा सकता है।

अत: z के मान में सम्भावित भिन्नात्मक त्रुटि

$$\frac{\Delta z}{z} = \pm\frac{a\Delta b}{ab}\pm\frac{b\Delta a}{ab}$$

$$= \pm\frac{\Delta b}{b}\pm\frac{\Delta a}{a} = \pm\frac{\Delta a}{a}\pm\frac{\Delta b}{b}$$

$\frac{\Delta z}{z}$ के चार सम्भव मान क्रमश:

$$\left(+\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}\right);\left(+\frac{\Delta a}{a}-\frac{\Delta b}{b}\right);\left(-\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}\right)$$

तथा $\left(-\frac{\Delta a}{a}-\frac{\Delta b}{b}\right)$ हैं। अत: z के परिकलित मान में अधिकतम आपेक्षिक त्रुटि अथवा भिन्नात्मक त्रुटि

$$\frac{\Delta z}{z} = \left(\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}\right)$$

अत: **गुणा की संक्रिया में गुणनफल के परिणाम में अधिकतम भिन्नात्मक त्रुटि अर्थात् आपेक्षिक त्रुटि मापित राशियों में अधिकतम आपेक्षिक त्रुटियों के योग के बराबर होती है।**

भाग संक्रिया में त्रुटियों का संयोजन–

यदि $z = a/b$ तो, $z \pm \Delta z = \dfrac{a+\Delta a}{b \pm \Delta b}$

$$\text{अत:}\ z\left(1\pm\frac{\Delta z}{z}\right) = \frac{a\left(1\pm\frac{\Delta a}{a}\right)}{b\left(1\pm\frac{\Delta b}{b}\right)}$$

$$= \frac{a}{b}\left(1\pm\frac{\Delta a}{a}\right)\left(1\pm\frac{\Delta b}{b}\right)^{-1}$$

$$= \frac{a}{b}\left(1\pm\frac{\Delta a}{a}\right)\left(1\pm\frac{\Delta b}{b}\right) = z\left(1\pm\frac{\Delta a}{a}\right)\left(1\pm\frac{\Delta b}{b}\right)$$

$$\text{अत:}\ 1\pm\frac{\Delta z}{z} = 1\pm\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}\pm\frac{\Delta a\Delta b}{ab};$$

यहाँ $\dfrac{\Delta a\Delta b}{ab}$ नगण्य है।

$$\text{इसलिए}\ \pm\frac{\Delta z}{z} = \left(\pm\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}\right)$$

अत: $\frac{\Delta z}{z}$ के चार सम्भव मान क्रमश:

$$\left(+\frac{\Delta a}{a}-\frac{\Delta b}{b}\right);\left(+\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}\right);$$

$\left(-\frac{\Delta a}{a}-\frac{\Delta b}{b}\right)$ तथा $\left(-\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}\right)$ हैं।

इसलिए z के परिकलित मान में अधिकतम आपेक्षिक त्रुटि

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}$$

इस प्रकार भाग की संक्रिया में भी अधिकतम आपेक्षिक त्रुटि प्रेक्षित राशियों में अधिकतम आपेक्षिक त्रुटियों के योग के बराबर होती है।

इसी प्रकार अधिकतम प्रतिशत त्रुटि है

$$\frac{\Delta z}{z}\times 100 = \frac{\Delta a}{a}\times 100+\frac{\Delta b}{b}\times 100$$

प्रश्न 20. राशियों की घात (Power) के कारण त्रुटियों का संयोजन स्पष्ट कीजिये।

उत्तर– राशियों की घात के कारण त्रुटि–

(a) यदि $z = a^m \cdot b^n$ तो

दोनों पक्षों का लघुगुणक (log) लेने पर–

$$\log z = m\log a + n\log b$$

दोनों ओर का अवकलन करने पर,

$$\frac{dz}{z} = m\left(\frac{da}{a}\right)+n\left(\frac{db}{b}\right)$$

अतः भिन्नात्मक त्रुटियों के पदों में

$$\pm\frac{\Delta z}{z} = \pm m\frac{\Delta a}{a} \pm n\frac{\Delta b}{b}$$

अतः z के परिकलन में अधिकतम भिन्नात्मक (आपेक्षिक) त्रुटि-

$$\frac{\Delta z}{z} = m\frac{\Delta a}{a} + n\frac{\Delta b}{b}$$

अथवा प्रतिशत त्रुटि के पदों में-

$$\left(\frac{\Delta z}{z}\times 100\right) = m\frac{\Delta a}{a}\times 100 + n\frac{\Delta b}{b}\times 100$$

(*b*) यदि $z = a^m/b^n$ तो-

दोनों पक्षों का लघुगुणक (log) लेने पर-

$$\log z = m\log a - n\log b$$

दोनों ओर का अवकलन करने पर,

$$\frac{dz}{z} = m\frac{da}{a} \text{ ख } n\frac{db}{b}$$

अतः आपेक्षिक त्रुटियों के पदों में

$$\pm\frac{\Delta z}{z} = \pm m\frac{\Delta a}{a} \pm n\frac{\Delta b}{b}$$

$\therefore$ z के परिकलित मान में अधिकतम आपेक्षिक त्रुटि

$$\left(\frac{\Delta z}{z}\right) = m\frac{\Delta a}{a} + n\frac{\Delta b}{b}$$

अथवा प्रतिशत त्रुटि के पदों में-

$$\left(\frac{\Delta z}{z}\times 100\right) = m\frac{\Delta a}{a}\times 100 + n\frac{\Delta b}{b}\times 100$$

(*c*) यदि $z = a^3 b/c^2$ अर्थात् $z = a^3 bc^{-2}$

दोनों पक्षों का लघुगुणक (log) लेने पर

$$\log z = 3\log a + \log b - 2\log c$$

दोनों ओर का अवकलन करने पर

$$\frac{dz}{z} = 3\frac{da}{a} + \frac{db}{b} - 2\frac{dc}{c}$$

भिन्नात्मक त्रुटि के पदों में

$$\pm\frac{\Delta z}{z} = \pm 3\frac{\Delta a}{a} \pm \frac{\Delta b}{b} \pm 2\frac{\Delta c}{c}$$

$\therefore$ अधिकतम आपेक्षिक त्रुटि

$$\left(\frac{\Delta z}{z}\right) = 3\left(\frac{\Delta a}{a}\right) + \left(\frac{\Delta b}{b}\right) + 2\left(\frac{\Delta c}{c}\right)$$

अथवा प्रतिशत त्रुटि के पदों में

$$\left(\frac{\Delta z}{z}\times 100\right) =$$

$$3\left(\frac{\Delta a}{a}\times 100\right) + \left(\frac{\Delta b}{b}\times 100\right) + 2\left(\frac{\Delta c}{c}\times 100\right)$$

उपरोक्त विवेचना से स्पष्ट है कि यदि कोई राशि किसी I wk es?k p के रूप में आती है तो अन्तिम परिणाम में उसके कारण त्रुटि p गुना होती है।

प्रश्न 21. सार्थक अंक से आप क्या समझते हैं? सार्थक अंकों की संख्या ज्ञात करने के नियम स्पष्ट कीजिए।

उत्तर– सार्थक अंक– प्रत्येक मापक यन्त्र की एक सीमा होती है। विज्ञान में किसी भी भौतिक राशि के मान को उतनी ही सत्यता से व्यक्त करना चाहिए जितनी सत्यता से उसका मापन किया जा सकता है। इसके अतिरिक्त किसी भी भौतिक राशि के मान को 10 की घात के रूप में व्यक्त करने से हमें उन निरर्थक अंकों से छुटकारा मिल जाता है जिससे हमको कोई सार्थक सूचना नहीं मिलती है।

"जितने अंकों से किसी राशि के मान को पूर्णतया व्यक्त किया जा सकता है, उनकी संख्या सार्थक अंकों की संख्या कहलाती है।"

किसी मापित राशि में सार्थक अंकों की संख्या उस राशि को मापने के लिए प्रयुक्त किये गये मापक-यन्त्र की यथार्थता पर निर्भर करती है। किसी संख्या में सार्थक अंक जितने अधिक होंगे उसके मापन में प्रतिशत त्रुटि उतनी ही कम होगी तथा सार्थक अंक कम होने पर त्रुटि अधिक होगी।

सार्थक अंकों की संख्या ज्ञात करने के निम्नलिखित नियम हैं-

(*i*) सभी अशून्य अंक (Non-zero digit) सार्थक अंक होते हैं। उदाहरणार्थ– राशि $x = 8696$ में सार्थक अंक चार हैं तथा राशि $x = 636$ में सार्थक अंक तीन हैं।

राशि $x = 215.75$ में सार्थक अंक 5 हैं।

(*ii*) दो अशून्य अंकों (Non-zero digit) के मध्य आने वाले सभी शून्य अंक सार्थक अंक की गणना में लिये जाते हैं।

उदाहरणार्थ– राशि $x = 2003$ में सार्थक अंकों की संख्या चार तथा राशि $x = 2.02304$ में सार्थक अंकों की संख्या 6 है।

(*iii*) यदि किसी संख्या में दशमलव बिन्दु से पूर्व कोई अशून्य अंक नहीं है अर्थात् संख्या का मान 1 से कम है तो

दशमलव बिन्दु के तुरन्त बाद के शून्य सार्थक अंकों की गणना में नहीं लिये जाते हैं।

उदाहरणार्थ– $x = 0.0035$, $x = 0.000369$ में क्रमशः 2 तथा 3 सार्थक अंक है।

(*iv*) यदि किसी संख्या में दशमलव बिन्दु से पूर्व कोई अशून्य अंक है तो दशमलव बिन्दु के तुरन्त बाद वाले शून्य भी सार्थक अंकों की गणना में लिये जाते हैं। अतः ऐसी स्थिति में दशमलव बिन्दु के बाद सभी अंक (शून्य व अशून्य) सार्थक अंकों की गणना में आते हैं।

उदाहरणार्थ– $x = 1.00057$, $x = 28.30578$, $x = 2.80300$ में सार्थक अंकों की संख्या क्रमशः 6,7,6 है।

(*v*) दशमलव रहित पूर्ण संख्या दायीं ओर अन्त में आने वाले शून्य सार्थक नहीं होते हैं। यदि दशमलव रहित संख्या किसी माप को व्यक्त करती है तो उसमें दायीं ओर के अन्त वाले शून्य भी सार्थक अंकों की गणना में लिये जाते हैं।

उदाहरणार्थ– $x = 20000$, $x = 465000$ में सार्थक अंकों की संख्या क्रमशः 1 तथा 3 है। यदि $x = 20$ किग्रा, $x = 3000$ मीटर, $x = 300$ सेकण्ड में क्रमशः सार्थक अंकों की संख्या 2, 4 व 3 है।

(*vi*) किसी संख्या को 10 की घातों की गुणा के रूप में लिखे होने पर उनको सार्थक अंकों में नहीं गिना जाता है।

उदाहरणार्थ– $x = 2.3 \times 10^5$, $x = 2.5 \times 10^{-3}$

$x = 4.1 \times 10^{-5}$ प्रत्येक में सार्थक अंक = 2 है।

(*vii*) किसी भौतिक राशि की माप को विभिन्न मात्रकों में व्यक्त करने पर सार्थक अंकों की संख्या बदलती नहीं है।

उदाहरणार्थ– 3 किमी = 3000 मी, = 300000 सेमी = 3000000 मिमी

इनमें प्रत्येक में सार्थक अंक = 1

चूँकि इन मापों के शून्य मापन से प्राप्त नहीं हुए हैं बल्कि गुणा से प्राप्त हुए हैं। अतः ऐसे शून्यों को 10 की घात के रूप में निम्न प्रकार लिखते हैं–

3 किमी = 3×10^3 मी = 3×10^5 सेमी = 3×10^6 मिमी

(*viii*) किसी भौतिक राशि की मापों में दशमलव की स्थिति बदलने से सार्थक अंकों की संख्या नहीं बदलती है।

उदाहरणार्थ– $x = 6346.8 = 63.468 \times 10^2$
$= 6.3468 \times 10^3 = 0.063468 \times 10^5$

प्रत्येक में सार्थक अंक = 5

प्रश्न 22. एक बाक्स की लम्बाई 24 सेमी, चौड़ाई 18.6 सेमी, तथा ऊंचाई 6 सेमी, है। बाक्स के आयतन के नापने में हुई अधिकतम सम्भव त्रुटि बताइये।

उत्तर– आयतन = लम्बाई × चौड़ाई × ऊंचाई

अर्थात् $V = l \times b \times h = lbh$

$\therefore$ भिन्नात्मक त्रुटि

$$\left(\frac{\Delta V}{V}\right) = \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta h}{h}$$

अतः आयतन V के मापन में अधिकतम सम्भव त्रुटि

$$\Delta V = V\left(\frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta h}{h}\right)$$
$$= lbh\left(\frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta h}{h}\right)$$
$$= bh\,\Delta l + lh\,\Delta b + lb\,\Delta h$$

यहाँ लम्बाई $l = 24.0$ सेमी, अतः $\Delta l = 0.1$ सेमी;

चौड़ाई $b = 18.6$ सेमी, अतः $\Delta b = 0.1$ सेमी;

ऊँचाई $h = 6.0$ सेमी, अतः $\Delta h = 0.1$ सेमी

अतः ΔV = 18.6 सेमी × 6.0 सेमी × 0.1 सेमी
+ 24.0 सेमी × 6.0 सेमी × 0.1 सेमी
+ 24.0 सेमी × 18.6 सेमी × 0.1 सेमी
= 11.16 सेमी^{3} + 14.40 सेमी^{3} + 44.64 सेमी^{3}
= 70.20 सेमी^{3}

प्रश्न 23. एक वस्तु का द्रव्यमान मापने में 3% की, आयतन मापने में 2% की त्रुटि होती है। इन मापों से वस्तु का घनत्व परिकलित करने में न्यूनतम तथा अधिकतम प्रतिशत त्रुटि कितनी होगी?

उत्तर– घनत्व $(d) = \frac{\text{द्रव्यमान}}{\text{आयतन}} = \frac{M}{V}$

$$\therefore \left|\frac{\Delta d}{d} \times 100\right|_{\min} = \left[\left(\frac{\Delta M}{M}\right) \times 100\right] - \left[\left(\frac{\Delta V}{V}\right) \times 100\right]$$

= द्रव्यमान में प्रतिशत त्रुटि– आयतन में प्रतिशत त्रुटि

= 3 % – 2 % = 1%

तथा
$$\left|\frac{\Delta d}{d} \times 100\right|_{\max} = \left[\left(\frac{\Delta M}{M}\right) \times 100\right] + \left[\left(\frac{\Delta V}{V}\right) \times 100\right]$$

= 3% + 2% = 5%

engg. Sahab

अध्याय

2

Engg.

Force and Motion

बल एवं गति
Force and Motion

एक शब्दीय उत्तर (ONE WORD ANSWERS)

प्रश्न 1. यदि दो समान वेक्टर राशियाँ $\vec{p}$ एवं $\vec{p}$ का परिणामी वेक्टर भी $\vec{p}$ हो तो दोनों समान वेक्टरों के बीच का कोण कितना होगा?

उत्तर– 120°

प्रश्न 2. दाब और बल में कौन सदिश है तथा कौन अदिश?

उत्तर– बल सदिश तथा दाब अदिश।

प्रश्न 3. क्या दो वेक्टरों के परिणामी वेक्टर का मान दिये गये वेक्टरों में से किसी एक वेक्टर के मान से कम हो सकता है? उदाहरण देकर समझाइये।

उत्तर– हाँ, जब दोनों वेक्टर परस्पर विपरीत दिशा में कार्यरत हों।

प्रश्न 4. क्या विभिन्न परिमाण वाली दो राशियों को इस प्रकार जोड़ सकते हैं कि उनका परिणामी शून्य हो?

उत्तर– नहीं।

प्रश्न 5. एक पिण्ड पर अनेक बल लग रहे हैं तथा पिण्ड साम्यावस्था में है। इसका क्या अर्थ है?

उत्तर– इसका अर्थ है कि सभी बलों का परिणामी अर्थात् वेक्टर योग शून्य है।

प्रश्न 6. सदिश राशि का परिमाण शून्य है, तो क्या इसका वेक्टर कहना उचित होगा।

उत्तर– हाँ।

प्रश्न 7. यदि दो वेक्टरों के योग तथा अन्तर परिमाण में बराबर हों, तो उनके बीच का कोण होगा।

उत्तर– 90°

प्रश्न 8. कोणीय वेग तथा कोणीय त्वरण की विमायें लिखिए।

उत्तर– T^{-1}, T^{-2}

प्रश्न 9. वृत्तीय गति करते हुए किसी पिण्ड के कोणीय वेग तथा रेखीय वेग में सम्बन्ध लिखिए।

उत्तर– $v = r\omega$

प्रश्न 10. वृत्तीय पथ पर गति कर रहे किसी कण के कोणीय त्वरण (α) रेखीय त्वरण (a) में सम्बन्ध लिखिए।

उत्तर– $a = r\alpha$

प्रश्न 11. क्या बिना त्वरण के कोई पिण्ड वक्राकार पथ पर गति कर सकता है?

उत्तर– नहीं

प्रश्न 12. समान चाल से वृत्तीय मार्ग पर गतिमान पिण्ड के अभिकेन्द्र त्वरण के मान को परिक्रमण आवृत्ति तथा त्रिज्या के पदों में लिखिए।

उत्तर– $a = 4\pi^2 n^2 R$

प्रश्न 13. एक वस्तु परिवर्ती चाल से एक वृत्तीय पथ पर गतिमान है। इसमें कौन-कौन से त्वरण होंगे?

उत्तर– स्पर्श रेखीय त्वरण तथा अभिकेन्द्र त्वरण दोनों होंगे।

प्रश्न 14. वृत्तीय पथ पर गति करते हुए पिण्ड के अभिकेन्द्रीय त्वरण का सूत्र कोणीय वेग और वृत्तीय पथ की त्रिज्या के पदों में लिखिए।

उत्तर– $a = r\omega^2$ जहाँ ω = कोणीय वेग, r = त्रिज्या

प्रश्न 15. द्रव्यमान का एक कण r त्रिज्या के वृत्तीय पथ पर एक समान कोणीय चाल (ω) से गति कर रहा है। इसके अभिकेन्द्र त्वरण तथा अभिकेन्द्र बल के मान लिखिए।

उत्तर– अभिकेन्द्र त्वरण $(a) = \frac{v^2}{r}$, अभिकेन्द्र $(F) = \frac{mv^2}{r}$

अति लघु उत्तरीय प्रश्न (VERY SHORT ANSWER QUESTIONS)

प्रश्न 1. अदिश राशि को परिभाषित कीजिए।

उत्तर– अदिश राशि– वे भौतिक राशियाँ जिनमें केवल परिमाण होता हैं, कोई दिशा (direction) नहीं होती, अदिश राशियाँ कहलाती हैं, जैसे– द्रव्यमान, समय, दूरी, चाल, कार्य आदि।

प्रश्न 2. सदिश राशियों से आप क्या समझते हैं?

उत्तर– सदिश राशियों– वे भौतिक राशियाँ जिनमें परिमाण एवं दिशा दोनों होते हैं, सदिश राशियाँ कहलाती हैं, जैसे– स्थिति, वेग, त्वरण, बल, संवेग आदि।

प्रश्न 3. एकांक वेक्टर से आप क्या समझते हैं?

उत्तर– एकांक वेक्टर (Unit Vector)– वह वेक्टर जिसका परिमाण 1 होता है, एकांक वेक्टर कहलाता है।

प्रश्न 4. शून्य वेक्टर से आप क्या समझते हैं?

उत्तर– शून्य वेक्टर (Zero Vector)– वह वेक्टर जिसका परिमाण शून्य है, शून्य वेक्टर कहलाता है।

प्रश्न 5. कोणीय विस्थापन को परिभाषित कीजिये।

उत्तर– कोणीय विस्थापन– एक समान वृत्तीय गति करते हुए कण की त्रिज्य वेक्टर एक निश्चित समयान्तराल में जितना कोण घूम जाती है वह गतिमान कण का कोणीय विस्थापन कहलाता है।

प्रश्न 6. कोणीय वेग को समझाइये।

उत्तर– कोणीय वेग (Angular Velocity)– वृत्तीय गति करते हुए कण द्वारा 1 सेकण्ड में वृत्त के केन्द्र पर अन्तरित कोण को इसका कोणीय वेग कहते हैं।

प्रश्न 7. अभिकेन्द्र बल को परिभाषित कीजिये।

उत्तर– अभिकेन्द्र बल– वृत्तीय गति करते पिण्ड पर एक बल कार्य करता है जिसकी दिशा सदैव वृत्त के केन्द्र की ओर दिष्ट रहती है। इस बल को अभिकेन्द्र बल कहते हैं।

प्रश्न 8. अभिकेन्द्र बल के उदाहरण लिखिए।

उत्तर– अभिकेन्द्र बल के उदाहरण निम्नलिखित हैं–

(*i*) डोरी से बंधे कण की क्षैतिज वृत्त में गति जब कण का भार नगण्य है।

(*ii*) डोरी से बंधे कण की क्षैतिज वृत्त में गति जबकि कण का भार नगण्य नहीं है।

(*iii*) वृत्ताकार मोड़ पर वाहनों का मुड़ना।

(*iv*) प्राकृतिक घटनाओं में वृत्ताकार गति।

(*v*) परमाणु में वृत्ताकार गति।

प्रश्न 9. अभिकेन्द्र त्वरण को समझाइये।

उत्तर– अभिकेन्द्र त्वरण– एक समान वृत्तीय गति वाले कण का त्वरण अभिकेन्द्रीय त्वरण कहलाता है क्योंकि यह हमेशा वृत्तीय पथ के वृत्त के केन्द्र की ओर होता है।

$$\boxed{r\omega^2 = \frac{v^2}{r}}$$

प्रश्न 10. रेखीय वेग को परिभाषित करें।

उत्तर– रेखीय वेग (Linear Velocity)– रेखीय वेग $\vec{v}$ की दिशा सदैव स्पर्श रेखीय होती है। रेखीय वेग v व कोणीय वेग ω में सम्बन्ध $v = r\omega$ है।

जहाँ r = पथ की त्रिज्या।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (LONG ANSWERS QUESTIONS)

प्रश्न 1. सदिश एवं अदिश राशियों को उदाहरण सहित समझाइये।

उत्तर– सदिश राशियाँ (Vector Quantities)– वे भौतिक राशियाँ जिनमें परिमाण (magnitude) एवं दिशा (direction) दोनों होते हैं, **सदिश राशियाँ** कहलाती हैं; जैसे– स्थिति, विस्थापन, वेग, भार, त्वरण, बल, संवेग, वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता तथा धारा-घनत्व आदि।

किसी भी सदिश राशि को पूर्णतया व्यक्त करने के लिए उसके परिमाण के साथ-साथ उसकी दिशा का बताना भी अनिवार्य होता है। यदि किसी अनजान व्यक्ति को यह बता दिया जाये कि अमुक स्थान से रेलवे स्टेशन 3 किमी॰ दूर है, तो यह कथन अधूरा है तथा वह व्यक्ति स्टेशन नहीं पहुँच सकेगा। परन्तु यदि यह कह दिया जाये कि रेलवे स्टेशन अमुक स्थान से 3 किमी॰ पश्चिम की ओर है, तो वह व्यक्ति स्टेशन की स्थिति को समझ जायेगा तथा गंतव्य स्थान पर पहुँच सकेगा। अत: स्थिति (position) एक सदिश राशि है।

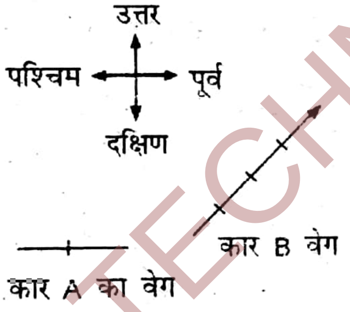
आदिश राशियाँ (Scalar Quantities)– वे भौतिक राशियाँ जिनमें केवल परिमाण (magnitude) होता है, कोई दिशा (direction) नहीं होती, **आदिश राशियाँ** कहलाती हैं; जैसे– शुद्ध संख्याएँ, द्रव्यमान, समय, दूरी, चाल, आयतन,

घनत्व, दाब, कार्य, ऊर्जा, शक्ति, ताप, विशिष्ट ऊष्मा, आवृत्ति, आवेश तथा वैद्युत धारा आदि।

किसी भी अदिश राशि को पूर्णतया व्यक्त करने के लिए एक संख्या (परिमाण) एवं इसके संगत मात्रक (यदि कोई है) की आवश्यकता होती है; जैसे– 50 पुस्तकें, 100 कुर्सियाँ, 20 मेजें, 50 किग्रा०, 100 सेकण्ड, 75 मीटर^3 आदि सभी अदिश राशियाँ हैं। अदिश राशियों को साधारण बीजगणितीय नियमों द्वारा जोड़ा, घटाया, गुणा तथा भाग किया जा सकता है।

प्रश्न 2. सदिश राशियों को निरूपण कैसे किया जाता है?

उत्तर– सदिश राशियों का निरूपण (Representation of Vector)– प्रत्येक सदिश राशि को हम एक तीर (arrow) अर्थात् बाण ($\rightarrow$) द्वारा निरूपित कर सकते हैं। इस बाण को वेक्टर कहते हैं। बाण की लम्बाई सदिश राशि का परिमाण तथा उसका शीर्ष उस राशि की दिशा को व्यक्त करते हैं। जिस बिन्दु से वेक्टर (बाण) आरम्भ होता है, उसे **पुच्छ** (tail) और जिस बिन्दु पर वह समाप्त होता है, उसे **बाणाग्र** (arrow head) अथवा **शीर्ष** कहते हैं।



चित्र–1.

माना कि एक कार A पूर्व दिशा में 20 मीटर/सेकण्ड के वेग से तथा दूसरी कार B उत्तर-पूर्व दिशा में 40 मीटर/सेकण्ड के वेग से गतिमान है। इन वेगों का निरूपण (चित्र. 1) में किया गया है। इसमें यह माना गया है कि 1 सेमी० लम्बाई 10 मीटर/सेकण्ड वेग को प्रदर्शित करती है। कार A के वेग का वेक्टर 2 सेमी० लम्बाई का है तथा इसकी नोंक पूर्व की ओर है। कार B के वेग का वेक्टर 4 सेमी. लम्बाई का है तथा इसकी नोंक उत्तर-पूर्व की ओर है। सदिश राशियाँ मोटे अक्षरों के ऊपर बाण का चिह्न लगाकर लिखी जाती हैं। यदि किसी सदिश राशि का परिमाण A है तब उस राशि को $\vec{A}$ द्वारा निरूपित करते हैं।

प्रश्न 3. वेक्टर के प्रकारों का विस्तारपूर्वक वर्णन कीजिए।

उत्तर– वेक्टर के प्रकार (Types of Vector)– वेक्टर निम्नलिखित प्रकार के होते हैं।

1. एकांक वेक्टर (Unit Vector)– "वह वेक्टर जिसका परिमाण 1 होता है, एकांक वेक्टर कहलाता है।" यह किसी वेक्टर राशि की दिशा को व्यक्त करता है। इसको अंग्रेजी के छोटे अक्षरों के ऊपर 'कैप' का चिह्न ($\wedge$) लगाकर निरूपित किया जाता है; जैसे– $\hat{a}, \hat{b}$ आदि।

अत: एकांक वेक्टर के पदों में किसी वेक्टर $\vec{A}$ को निम्न प्रकार व्यक्त किया जाता है–

$\vec{A}$ = ($\vec{A}$ का परिमाण) $\times$ ($\vec{A}$ की दिशा में एकांक वेक्टर)

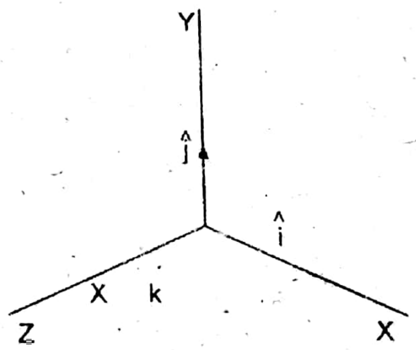
$$\vec{A} = (A)\ (\hat{a})$$

अत: किसी वेक्टर की दिशा में एकांक वेक्टर

$$\hat{a} = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{\text{वेक्टर } \vec{A}}{\text{वेक्टर } \vec{A} \text{ का परिमाण}}$$

$\hat{a}$ को 'ए कैप' पढ़ा जाता है।

2. लम्बकोणीय एकांक वेक्टर (Orthogonal Unit Vectors)– त्रिविमीय कार्तीय तल में X, Y तथा Z अक्षों के अनुदिश एकांक वेक्टरों को क्रमश: $\hat{i}, \hat{j}$ तथा $\hat{k}$ से प्रदर्शित करते हैं (चित्र–2)। ये तीनों परस्पर लम्बवत् होते हैं। अत: इनको लम्ब कोणिक एकांक वेक्टर (Orthogonal unit vectors) भी कहते है।



चित्र–2.

यदि X– दिशा में किसी सदिश $\vec{A}$ का मापांक A हो; तो

$$\vec{A} = A\hat{i}$$

इसी प्रकार Y– दिशा में किसी सदिश $\vec{B}$ का मापांक B हो तो

$$\vec{B} = B\hat{j}$$

तथा Z– दिशा में किसी सदिश $\vec{C}$ का मापांक C हो, तो

$$\vec{C} = C\hat{k}$$

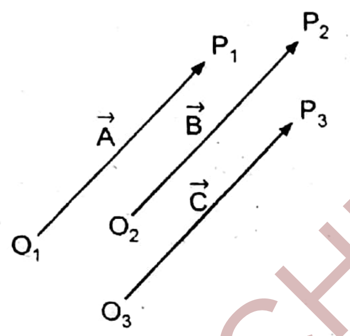
सदिश $\hat{i}, \hat{j}$ तथा $\hat{k}$ का परिमाण एकांक होता है तथा इनका उपयोग केवल किसी सदिश की दिशा व्यक्त करने के लिए किया जाता है।

3. समान वेक्टर (Equal Vectors)– वे वेक्टर जिनकी लम्बाइयाँ (परिमाण) तथा दिशाएँ समान हों, समान वेक्टर कहलाते हैं। ये परस्पर समान्तर होते हैं। (चित्र–3) में

रेखा $O_1P_1 = O_2P_2 = O_3P_3$

तथा रेखा $O_1P_1 \parallel O_2P_2 \parallel O_3P_3$

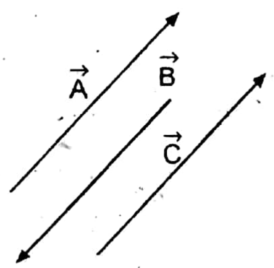
अत: $\vec{A} = \vec{B} = \vec{C}$



चित्र–3

4. विपरीत वेक्टर (Opposite Vectors)– वे वेक्टर जो परिमाण में बराबर, परन्तु दिशा में परस्पर विपरीत होते हैं, विपरीत वेक्टर कहलाते हैं।

संलग्न (चित्र–4) में $\vec{A}$ तथा $\vec{C}$ परिमाण में $\vec{B}$ के बराबर हैं, परन्तु इनकी दिशा $\vec{B}$ की दिशा के विपरीत है।



चित्र–4

अत: $\vec{A} = -\vec{B}$ तथा $\vec{C} = -\vec{B}$

अथवा $\vec{B} = -\vec{A}$ तथा $\vec{B} = -\vec{C}$

अत: स्पष्ट है कि यदि किसी वेक्टर की दिशा उलट दी जाये, तो उसके द्वारा प्रदर्शित होने वाली सदिश राशि का चिह्न उलट जाता है।

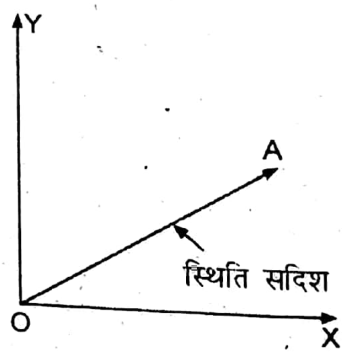
5. शून्य वेक्टर (Zero Vector or Null Vector)– वह वेक्टर जिसका परिमाण शून्य है, शून्य वेक्टर कहलाता है। विरामावस्था में स्थित गाड़ी का विस्थापन वेक्टर, एकमसान वेग से गतिमान पिण्ड का त्वरण वेक्टर आदि शून्य वेक्टर के उदाहरण है।

शून्य वेक्टर को $\vec{0}$ से निरूपित किया जाता है। इसकी पुच्छ (प्रारम्भिक बिन्दु) तथा शीर्ष (अन्तिम बिन्दु) एक-दूसरे के साथ संपाती होते हैं; अत: इसकी दिशा अनिश्चित होती है।

अत: यदि दो वेक्टर परिमाण में बराबर तथा दिशा में विपरीत हों, तो उनका वेक्टर योग एक शून्य वेक्टर होगा।

अत: यदि $\vec{A} = -\vec{B}$ तो $\vec{A} + \vec{B} = \vec{0}$

6. स्थिति वेक्टर अथवा स्थिति सदिश (Position Vector)– मूलबिन्दु के सापेक्ष किसी बिन्दु की स्थिति को व्यक्त करने के लिए प्रयुक्त वेक्टर उस बिन्दु का स्थिति वेक्टर कहलाता है। इसको सामान्यत: $\vec{r}$ से प्रदर्शित करते हैं।



चित्र–5

द्विविमीय कार्तीय निर्देशांक प्रणाली में यदि किसी बिन्दु के स्थिति निर्देशांक (x, y) हों, तो उसका स्थिति वेक्टर निम्न प्रकार व्यक्त किया जाता है–

$\vec{r} + x\hat{i} + y\hat{j}$ जहाँ $|\hat{r}| = \sqrt{(x^2 + y^2)}$

यदि त्रिविमीय कार्तीय निर्देशांक प्रणाली में किसी बिन्दु के स्थिति निर्देशांक (x, y, z) हों, तो उसका स्थिति वेक्टर निम्न प्रकार व्यक्त किया जाता है–

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ जहाँ $|\vec{r}| = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$

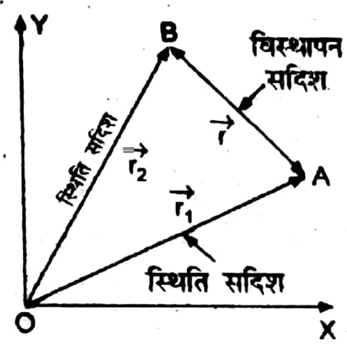
यहाँ $\hat{i}, \hat{j}$ तथा $\hat{k}$ लम्ब कोणिक एकांक वेक्टर हैं।

स्थिति सदिश से हमें ज्ञात होता है–

(*i*) मूल बिन्दु से पिण्ड की न्यूनतम दूरी,

(*ii*) मूल बिन्दु के सापेक्ष पिण्ड की दिशा।

7. विस्थापन सदिश (Displacement Vector)– माना कि एक पिण्ड $X–Y$ समतल में गतिमान है और किसी क्षण पर यह A बिन्दु पर है। जब $\overline{OA}$ इसकी स्थिति सदिश है। माना t समय में पिण्ड A से चलकर B पर पहुँचता है, जहाँ इसका स्थिति सदिश $\overline{OB}$ होगा (चित्र–6)।



चित्र–6

A और B को मिलाने पर प्राप्त सदिश $\overline{AB}$ विस्थापन सदिश कहलाता है।

चित्र के अनुसार, विस्थापन सदिश $\overline{AB}$ की दिशा A (प्रारम्भिक स्थिति) से B (अन्तिम स्थिति) की ओर होती है। यहाँ

$$\overline{OA} = \vec{r}_1, \overline{OB} = \vec{r}_2$$

तथा $\overline{AB} = \vec{r}$ अर्थात् विस्थापन सदिश

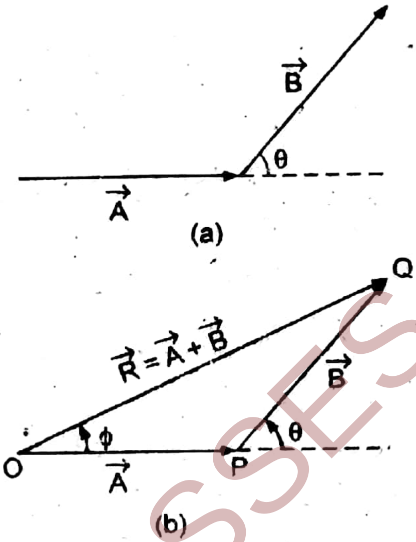
$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$$

या $$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

स्पष्टतः विस्थापन सदिश वह सदिश है जो यह दर्शाता है कि दिये गये समयान्तराल t में पिण्ड कितना और किस दिशा में विस्थापित हुआ है।

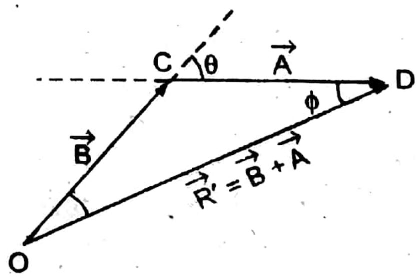
प्रश्न 4. वेक्टरों के जोड़ने की त्रिभुज विधि का वर्णन कीजिए।

उत्तर– वेक्टरों के जोड़ने की त्रिभुज विधि– माना दो वेक्टर $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ एक-दूसरे से θ कोण पर कार्यरत है।



चित्र–7

इन दोनों वेक्टरों को जोड़ने के लिए चित्र.7 (b) की भाँति $\vec{A}$ को निरूपित करती हुई एक वेक्टर रेखा $\overline{OP}$ खींचते हैं। इसके बाणाग्र (arrow-head) P पर $\overline{OP}$ की दिशा से θ कोण बनाते हुए $\vec{B}$ को निरूपित करने वाली दूसरी वेक्टर रेखा $\overline{PQ}$ खींचते हैं। अब $\vec{A}$ के पुच्छ O से आरम्भ करके $\vec{B}$ के शीर्ष (head) Q तक एक वेक्टर रेखा $\overline{OQ}$ खींचते हैं। यह वेक्टर रेखा $\overline{OQ}$ ही $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ के सदिश योग $\vec{R}$ को निरूपित करेगी।



चित्र–8

अतः $$\overline{OP} + \overline{PQ} = \overline{OQ}$$

अर्थात् $$\vec{A} + \vec{B} = \vec{R} \quad ...(1)$$

$\vec{R}$ की लम्बाई सदिश योग $(\vec{A} + \vec{B})$ के परिमाण को व्यक्त करेगी तथा इसकी दिशा $\vec{R}$ तथा $\vec{A}$ के बीच के कोण ϕ द्वारा व्यक्त होगी।

वेक्टर $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ का वेक्टर योग ज्ञात करने के लिए यह आवश्यक नहीं है कि पहले $\vec{A}$ को ही खींचा जाये।

पहले चित्र–(8) की भाँति $\vec{B}$ को भी खींचा जा सकता है। इसमें पहले $\vec{B}$ को निरूपित करने वाली वेक्टर रेखा $\overline{OC}$, वेक्टर $\vec{B}$ की दिशा में खींची गयी है। फिर इसके बाणाग्र C पर $\vec{A}$ के समान्तर इसको निरूपित करने वाली वेक्टर रेखा $\overline{CD}$ खींची गयी है। अब $\vec{B}$ की पुच्छ O को $\vec{A}$ के बाणाग्र D से मिलाने वाली वेक्टर रेखा $\overline{OD}$ दोनों वेक्टरों के योग $(\vec{B}+\vec{A})$ को प्रदर्शित करेगी।

अतः $\qquad \overline{OC}+\overline{CD}=\overline{OD}$

अर्थात् $\qquad \vec{B}+\vec{A}=\vec{R}'$

चित्र–(b) तथा (8) से स्पष्ट है कि रेखाएँ OQ तथा OD परस्पर बराबर तथा समान्तर हैं। अतः $\overline{OQ}$ तथा $\overline{OD}$ के परिमाण व दिशा समान हैं।

$$\overline{OQ}=\overline{OD} \text{ अथवा } \vec{R}=\vec{R}'$$

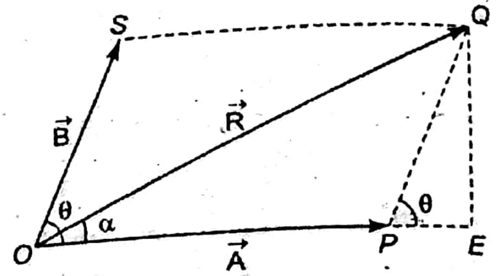
अर्थात्, $\qquad \vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$

अतः उपर्युक्त विवेचना से स्पष्ट है कि दो वेक्टरों का योग इस बात पर निर्भर नहीं करता है कि उनको किस क्रम में जोड़ा गया है। अतः वेक्टरों का योग, क्रम विनिमेय नियम का पालन करता है।

प्रश्न 5. वेक्टरों को जोड़ने की समान्तर चतुर्भुज विधि का विस्तारपूर्वक वर्णन कीजिए।

उत्तर– वेक्टरों को जोड़ने की समान्तर चतुर्भुज विधि (Method of Parallelogram of Vectors)– इस विधि के अनुसार, "यदि दो वेक्टर परिमाण व दिशा में किसी समान्तर चतुर्भुज को दो संलग्न (adjacent) भुजाओं द्वारा प्रदर्शित किये जा सकें, तो इनका वेक्टर योग परिमाण व दिशा में इस चतुर्भुज के उस विकर्ण द्वारा प्रदर्शित किया जाता है, जो उन दोनों भुजाओं के कटान बिन्दु से होकर जाता है।"

चित्र– 9 में परस्पर θ कोण पर कार्यरत दो वेक्टरों $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ को एक समान्तर चतुर्भुज $OPQS$ की दो संलग्न भुजाओं OP तथा OS द्वारा प्रदर्शित किया गया है। अतः इनका वेक्टर योग $(\vec{R}=\vec{A}+\vec{B})$ इन भुजाओं के प्रतिच्छेदन बिन्दु O से जाने वाले विकर्ण OQ द्वारा प्रदर्शित होगा।



चित्र–9

परिणामी $\vec{R}$ का परिमाण ज्ञात करने के लिए इस भुजा OP को बढ़ाकर इस पर लम्ब QE डाला।

अतः $\angle SOP=\theta$ $\qquad$ ($\because$ संगत कोण है।)

समकोण ΔOEQ में–

$$OQ^2=(OE)^2+(EQ)^2=(OP+PE)^2+(EQ)^2$$
$$=OP^2+PE^2+2OP\,.\,PE+EQ^2$$
$$=OP^2+(PE^2+EQ^2)+2OP\,.\,PE$$

परन्तु $PE^2+EQ^2=PQ^2$ $\qquad$ (समकोण ΔQEP से)

$$OQ^2=OP^2+PQ^2+2OP.\,PE$$

परन्तु समकोण ΔPEQ से

$$\cos\theta=\frac{PE}{PQ} \text{ अथवा } PE=PQ\cos\theta$$

$$\therefore\ OQ^2=OP^2+PQ^2+2OP.\,PQ.\cos\theta$$

यदि $OP=A$, $PQ=OS=B$ तथा $OQ=\vec{R}$

तो $\qquad R^2=A^2+B^2+2AB\cos\theta$

या $\qquad R=\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos\theta}$ $\qquad$ ...(1)

यदि परिणामी $\vec{R}$ की दिशा $\vec{A}$ की दिशा से α कोण बनाये तो

$$\tan\alpha=\frac{EQ}{OE}=\frac{EQ}{OP+PE}$$

परन्तु $OP=A$ तथा समकोण ΔPEQ से

$$PE=B\cos\theta \text{ तथा } EQ=B\sin\theta$$

$$\tan\alpha=\frac{B\sin\theta}{A+B\cos\theta} \qquad ...(2)$$

विशेष स्थितियाँ–

(*i*) जब दोनों वेक्टर एक ही दिशा में हों अर्थात् $\theta=0°$

$\therefore$ समी॰ (1) से $R=\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos 0°}$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB} = \sqrt{(A+B)^2}$$

अर्थात् $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$

समी० (2) से $\tan\alpha = \dfrac{B\sin 0°}{A + B\cos 0} = 0$

(ii) जब दोनों वेक्टर परस्पर लम्बवत् हैं अर्थात् $\theta = 90°$

$\therefore$ समी० (1) से $R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos 90°}$

$= \sqrt{A^2 + B^2}$ $\qquad (\because \cos 90° = 0)$

तथा समी० (2) से $\tan\alpha = \dfrac{B\sin 90°}{A + B\cos 90°} = \dfrac{B}{A}$

(iii) जब दोनों वेक्टर परस्पर विपरीत दिशाओं में है अर्थात् $\theta = 180°$

तो समी० (1) से $R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos 180°}$

$= \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB}$

$= \sqrt{(A-B)^2}$

या $\vec{R} = \vec{A} - \vec{B}$

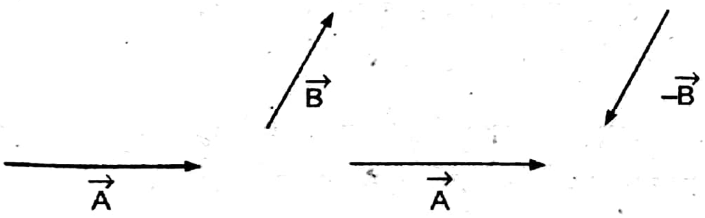
समी० (2) से $\tan\alpha = \dfrac{B\sin 180°}{A + B\cos 180°} = 0$

अत: उपरोक्त से स्पष्ट है जब दोनों वेक्टर A व B एक ही दिशा में होते हैं तो R अधिकतम तथा विपरीत होने पर R न्यूनतम होता है।

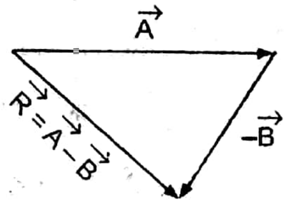
प्रश्न 6. दो वेक्टरों के घटाने का वर्णन कीजिये।

उत्तर– दो वेक्टरों का घटाना– "एक वेक्टर में से दूसरे वेक्टर को घटाने का अर्थ है पहले वेक्टर में दूसरे वेक्टर का विपरीत वेक्टर (अर्थात् ऋणात्मक वेक्टर) जोड़ना।"

अर्थात् $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$



(a) (b)

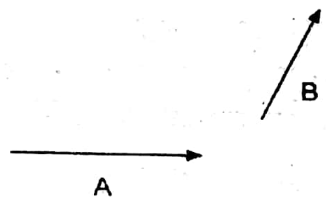


(c)

चित्र–10

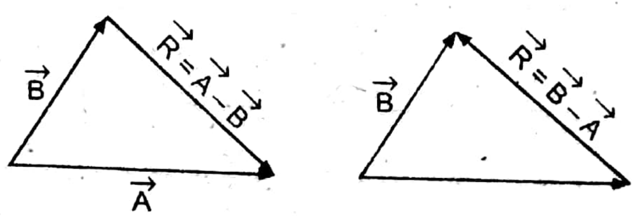
अत: चित्र–10 (a) में प्रदर्शित दो वेक्टर $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ है। $\vec{A}$ में से $\vec{B}$ को घटाने के लिए पहले चित्र–10 (b) की भाँति $\vec{B}$ की दिशा उलटकर उसका ऋणात्मक वेक्टर $(-\vec{B})$ प्राप्त कर लेते हैं। इसके पश्चात् चित्र–10 (c) की भाँति $\vec{A}$ में $(-\vec{B})$ वेक्टर जोड़कर इनका परिणामी $\vec{R}$ ज्ञात कर लेते हैं; जहाँ $\vec{R}$ वेक्टरों $\vec{A}$ तथा $(-\vec{B})$ का वेक्टर योग अर्थात् $\vec{A}$ व $\vec{B}$ का अन्तर होगा।

$$\vec{R} = \vec{A} + (-\vec{B}) = \vec{A} - \vec{B}$$



चित्र–11

वेक्टरों को एक दूसरी विधि से भी घटाते हैं– पहले वेक्टर $\vec{A}$ और $\vec{B}$ को एक ही बिन्दु से ज्ञात दिशाओं में खीचते हैं। अब यदि वेक्टर $\vec{A}$ में से वेक्टर $\vec{B}$ को घटाना है तो $\vec{B}$ के बाणाग्र से वेक्टर $\vec{A}$ के बाणाग्र तक वेक्टर $\vec{R}$ खींचते हैं। [चित्र–12 (a)]। अत: $\vec{R} = \vec{A} - \vec{B}$ यदि वेक्टर $\vec{B}$ में से वेक्टर $\vec{A}$ घटाना है तो $\vec{A}$ के बाणाग्र से आरम्भ करके $\vec{B}$ के बाणाग्र तक वेक्टर $\vec{R}$ खींचते हैं [(चित्र–12(b)]।



(a) (b)

चित्र–12

स्पष्ट है वेक्टर $\vec{R}$ व $\vec{R'}$ आपस में समान्तर हैं, उनकी लम्बाइयाँ बराबर हैं, परन्तु उनकी दिशाएँ विपरीत हैं, अतः

$$\vec{R} = -\vec{R'}$$

अर्थात् $\quad \vec{A} - \vec{B} = -(\vec{B} - \vec{A})$

स्पष्ट है कि वेक्टरों का अन्तर इस बात पर निर्भर करता है कि उन्हें किस क्रम में घटाया गया है। दूसरे शब्दों में, वेक्टर-अन्तर क्रमविनिमेय (commutative) नहीं होता।

प्रश्न 7. निम्नलिखित नियमों का उल्लेख कीजिये।

(i) बलों के समान्तर चतुर्भुज का नियम

(ii) बलों के त्रिभुज का नियम

उत्तर–(i) बलों के समान्तर चतुर्भुज का नियम– किसी कंण पर कार्य करने वाले दो संगामी बलों को यदि एक समान्तर चतुर्भुज की कोंणीय बिन्दु से दो आसन्न भुजाओं द्वारा मान तथा दिशा में व्यक्त किया जाये तो उनका परिणामी, मान तथा दिशा में इसी समान्तर चतुर्भुज के उस कोंणीय बिन्दु से खींचे गये विकर्ण (diagonal) द्वारा व्यक्त होता है।

(ii) बलों के त्रिभुज का नियम– किसी बिन्दु पर कार्य कर रहे तीन बलों, परिमाण तथा दिशा में यदि एक त्रिभुज की क्रमानुसार तीन भुजाओं द्वारा निरूपित किया जा सके तो वे तीनों बल साम्यावस्था में होंगे।

अथवा

यदि किसी बिन्दु पर कार्य कर रहे दो बलों को त्रिभुज की क्रम से ली गई दो भुजाओं द्वारा परिमाण और दिशा में निरूपित किया जा सके तो उसी त्रिभुज की विपरीत क्रम में ली गई तीसरी भुजा उपर्युक्त दो बलों का परिणामी निरूपित करती है।

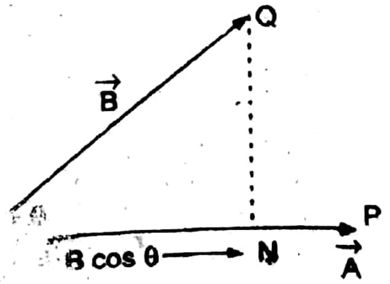
प्रश्न 8. दो वेक्टरों के स्केलर गुणनफल को उदाहरण सहित स्पष्ट कीजिए।

उत्तर– दो वेक्टरों का स्केलर गुणनफल– इस प्रकार, यदि दो वेक्टरों $\vec{OP} = \vec{A}$ तथा $\vec{OQ} = \vec{B}$ के परिमाण Øe' %A तथा B हों एवं उनके बीच का कोण θ हो, (चित्र–13) तो स्केलर गुणन की उपर्युक्त परिभाषानुसार–

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta \qquad ...(1)$$

यहाँ θ = $\vec{B}$ द्वारा $\vec{A}$ के साथ बना कोण।

परन्तु (चित्र–13)से $B\cos\theta = ON = \vec{B}$ के $\vec{B}$ के $\vec{A}$ की दिशा में घटक का परिमाण अर्थात् $\vec{B}$ का $\vec{A}$ पर प्रक्षेप।



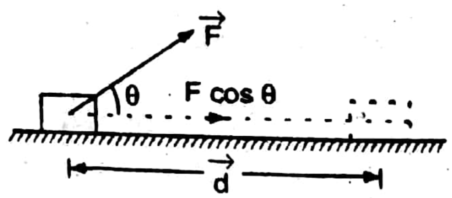
चित्र–13.

अतः दो वेक्टरों के स्केलर गुणन की परिभाषा निम्न प्रकार भी दी जा सकती है–

"दो वेक्टरों का स्केलर गुणनफल किसी एक वेक्टर के परिमाण तथा उसकी दिशा में दूसरे वेक्टर के घटक के परिमाण अर्थात् उस वेक्टर पर दूसरे वेक्टर के प्रक्षेप के गुणनफल के बराबर होता है।"

स्केलर गुणनफल के उदाहरण– (1) कार्य (Work)– माना एक पिण्ड, क्षैतिज तल पर चलने के लिए स्वतन्त्र है तथा इस पर क्षैतिज से 'θ' कोण पर एक बल $\vec{F}$ लगाया जा रहा है। इस बल के अन्तर्गत पिण्ड का क्षैतिज दिशा में विस्थापन $\vec{d}$ है। (चित्र–14)कार्य की परिभाषानुसार जब विस्थापन बल की दिशा में हो तो

कार्य = बल × बल की दिशा में विस्थापन



चित्र–14.

परन्तु जब विस्थापन बल की दिशा से भिन्न दिशा में हो तो कार्य = विस्थापन की दिशा में बल का घटक × विस्थापन अतः बल $\vec{F}$ द्वारा पिण्ड पर किया गया कार्य

$$W = (F\cos\theta)(d) = Fd\cos\theta \qquad ...(1)$$

(जहाँ $F\cos\theta$ = $\vec{d}$ की दिशा में $\vec{F}$ के घटक का परिमाण) परन्तु स्केलर गुणन की परिभाषा से

$$\vec{F} \cdot \vec{d} = Fd.\cos\theta \qquad ...(2)$$

अतः समी० (1) तथा समी० (2) से

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

अतः बल तथा विस्थापन, वेक्टरों क्रमशः $\vec{F}$ व $\vec{d}$ का स्केलर गुणनफल कार्य W के बराबर होता है, जो कि एक स्केलर राशि है।

प्रश्न 9. दो वेक्टरों के वेक्टर गुणनफल को उदाहरण सहित स्पष्ट कीजिए।

उत्तर– दो वेक्टरों के वेक्टर गुणनफल– दो वेक्टरों का वेक्टर गुणनफल एक सदिश राशि ही है जिसका परिमाण दोनों वेक्टरों के परिमाणों तथा उनके बीच के कोण की ज्या (sin) के गुणनफल के बराबर होता है तथा इसकी दिशा दोनों वेक्टरों के उभयनिष्ठ तल के लम्बवत् होती है तथा दक्षिणावर्त पेंच नियम द्वारा निर्धारित की जाती है।"

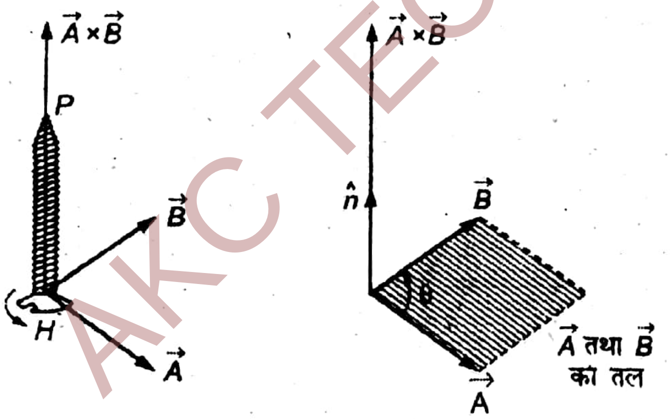
यदि दो वेक्टर $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ हों तथा उनके बीच का कोण θ हो तो उनका वेक्टर गुणनफल निम्न प्रकार होता है–

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin\theta \, \hat{n}$$

जहाँ A तथा B क्रमशः वेक्टरों $\vec{A}$ व $\vec{B}$ के परिमाण हैं तथा $\hat{n}$ एक एकांक वेक्टर है जो $\vec{A}$ व $\vec{B}$ के तल के लम्बवत् है।

चूँकि 0 तथा π के बीच किसी कोण की ज्या (sin) ऋणात्मक नहीं होती, अतः वेक्टर गुणनफल ऋणात्मक नहीं हो सकता (जबकि स्केलर गुणनफल ऋणात्मक हो सकता है)।

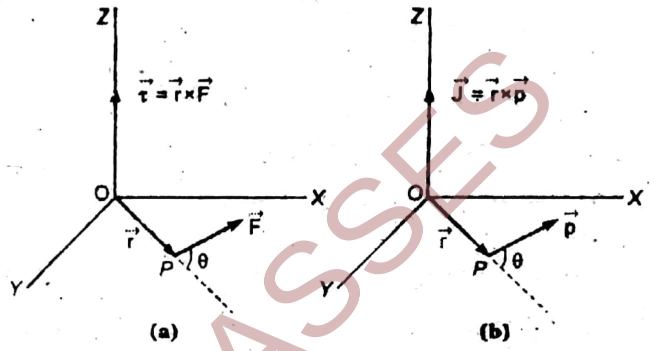
वेक्टर गुणनफल $\vec{A} \times \vec{B}$ की दिशा वेक्टरों $\vec{A}$ व $\vec{B}$ के तल के लम्बवत् होती है तथा इसकी अभिदिशा (sense) उस दक्षिणावर्ती पेंच के आगे बढ़ने की दिशा से दी जाती है जिसको पहले वेक्टर $\vec{A}$ से दूसरे वेक्टर $\vec{B}$ की ओर दोनों के बीच बने लघु (smaller) कोण से घुमाया जाता है।



चित्र–15

$\vec{A} \times \vec{B}$ की दिशा निर्धारित करने के लिए दक्षिणावर्त पेंच के अक्ष को $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ के तल के लम्बवत् रखकर पेंच के शीर्ष H को $\vec{A}$ से $\vec{B}$ की ओर लघु (smaller) कोण से घुमाने पर पेंच की नोंक p की गति की दिशा वेक्टर गुणनफल $\vec{A} \times \vec{B}$ की दिशा होगी (चित्र–15)।

वेक्टर गुणनफल के उदाहरण– (1) बल-आघूर्ण– माना कि कोई बल $\vec{F}$ एक बिन्दु पर कार्यरत है जिसकी मूल बिन्दु के सापेक्ष सदिश स्थिति $\vec{r}$ है। चित्र–16 (a) तब बल $\vec{F}$ का मूल बिन्दु के परित बल-आघूर्ण।



चित्र–16

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

इसका परिमाण $\tau = rF\sin\theta$ है जहाँ θ, $\vec{r}$ व $\vec{F}$ के बीच कोण है, तथा इसकी दिशा $\vec{r}$ व $\vec{F}$ के तल के लम्बवत् है। चित्र– 16 में $\vec{r}$ व $\vec{F}$ X–Y तल में हैं। अतः बल-आघूर्ण $\vec{\tau}$ धन Z-अक्ष के अनुदिश है (दक्षिणावर्ती पेंच के नियम के अनुसार)।

प्रश्न 10. स्केलर एवं वेक्टर गुणनफल के गुणों की विवेचना कीजिये।

उत्तर– स्केलर गुणनफल के गुण (Properties of Scalar Product)–

(i) स्केलर गुणनफल, गुणा के क्रम विनिमेय नियम का पालन करता है।

(ii) स्केलर गुणनफल सदैव गुणा के वितरण नियम का पालन करता है।

(iii) परस्पर लम्बवत् दो वेक्टरों का स्केलर गुणनफल शून्य होता है।

(iv) दो समान्तर वेक्टरों का स्केलर गुणनफल उनके परिमाणों के गुणनफल के बराबर होता है।

(v) किसी वेक्टर का उसी वेक्टर से स्केलर गुणनफल उस वेक्टर के परिमाण के वर्ग के बराबर होता है।

वेक्टर गुणनफल के गुण (Properties of Vector Product) —

(i) वेक्टर गुणनफल क्रम-विनिमेय (Commutative)

नहीं होता, $\vec{A}\times\vec{B}\neq\vec{B}\times\vec{A}$

(*ii*) वेक्टर गुणनफल वितरित होता है, अर्थात्

$$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$$

परन्तु वेक्टर गुणनफल का वितरण करते समय क्रम नहीं बदलना चाहिए।

(*iii*) यदि किसी भी एक वेक्टर को किसी स्केलर से गुणा कर दें तो वेक्टर गुणनफल भी उसी स्केलर से गुणा हो जाता है, अर्थात्

$$(m\vec{A})\times\vec{B}=\vec{A}\times(m\vec{B})=mAB\sin\theta\,\hat{n}$$

(*iv*) दो परस्पर लम्बवत् वेक्टरों के वेक्टर गुणनफल का परिमाण उनके अदिश परिमाणों के गुणनफल के बराबर होता है।

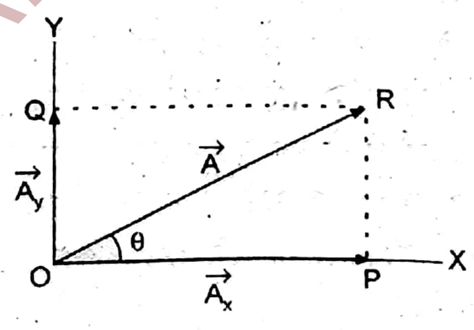
(*v*) दो समान्तर वेक्टरों का वेक्टर गुणनफल एक शून्य वेक्टर (अथवा शून्य) होता है।

(*vi*) किसी वेक्टर का उसी वेक्टर से वेक्टर गुणनफल एक शून्य वेक्टर (अथवा शून्य) होता है।

$$\vec{A}\times\vec{A}=AA\sin(0^\circ)\ \hat{n}=\vec{O}\ \text{अथवा}\ 0$$

प्रश्न 11. किसी वेक्टर के वियोजन को समझाइये।

उत्तर– वेक्टर का वियोजन (Resolution of Vector)– वेक्टरों को जोड़ने की विपरीत क्रिया ही वेक्टर वियोजन कहलाती है। अत: किसी दिये हुए वेक्टर को ऐसे दो या दो से अधिक वेक्टरों में विभक्त करना जिनका समतुल्य प्रभाव वही हो जो दिये हुए अकेले वेक्टर का है, तो इस प्रकार प्राप्त वेक्टर दिये हुए वेक्टर के अवयव अर्थात् घटक (components) कहलाते हैं। तथा यह क्रिया वेक्टर वियोजन कहलाती है। उपयोग की दृष्टि से किसी वेक्टर का परस्पर एक-दूसरे के लम्बवत् घटकों में वियोजन अधिक महत्त्वपूर्ण है, जिसको निम्न प्रकार समझा जा सकता है–



चित्र–17

जब किसी वेक्टर को ऐसे दो वेक्टरों में वियोजित किया जाता है, जो परस्पर लम्बवत् हों तो इन वेक्टरों को दिये गये वेक्टर के आयताकार घटक (rectangular components) कहते हैं।

माना चित्र– 17 में प्रदर्शित वेक्टर $\overrightarrow{OR}=\vec{A}$ को दो आयताकार घटकों में वियोजित करना है। इसके लिए $\vec{A}$ की पुच्छ O को मूल बिन्दु मानते हुए दो समकोणिक अक्ष OX तथा OY खींच लेते हैं। तत्पश्चात् $\vec{A}$ के बाणाग्र R से इन अक्षों पर लम्ब क्रमशः RP तथा RQ खींच लेते हैं। O से बिन्दु P तथा Q तक खींचे गये वेक्टर $\overrightarrow{OP}$ तथा $\overrightarrow{OQ}$ क्रमशः $\vec{A}$ के आयताकार घटकों $\vec{A}_x$ तथा $\vec{A}_y$ को प्रदर्शित करेंगे। वेक्टर योग की समान्तर चतुर्भुज विधि के अनुसार–

$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$$

अर्थात् $$\vec{A}=\vec{A}_x+\vec{A}_y \qquad ...(1)$$

रेखा OR, OP तथा OQ की लम्बाइयाँ क्रमशः $\vec{A},\vec{A}_x$ तथा $\vec{A}_y$ के परिमाण, A, A_x तथा A_y को प्रदर्शित करेंगी।

यदि वेक्टर $\vec{A}$ अक्ष OX से θ कोण बनाये तो चित्र–से

$$Ax=A\cos\theta \qquad ...(2)$$

$$Ay=A\sin\theta \qquad ...(3)$$

समी० (2) तथा समी० (3) का वर्ग करके जोड़ने पर

$$A_x^2+A_y^2=A^2\cos^2\theta+A^2\sin^2\theta$$
$$=A^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=A^2$$
$$(\because \cos^2\theta+\sin^2\theta=1)$$

$$\therefore \quad A=\sqrt{(A_x^2+A_y^2)} \qquad ...(4)$$

समी० (3) को समी० (2) से भाग देने पर

$$\frac{A_y}{A_x}=\frac{A\sin\theta}{A\cos\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$$

$$\therefore \quad \theta=\tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right) \qquad ...(5)$$

यदि किसी वेक्टर $\vec{A}$ के आयताकार घटकों के परिमाण A_x तथा A_y ज्ञात हों, उपर्युक्त सूत्र (4) की सहायता से $\vec{A}$ का परिमाण A तथा समी० (5) की सहायता से $\vec{A}$ की दिशा ज्ञात कर सकते हैं।

प्रश्न 12. यदि दो वेक्टरों के परिमाण 3 व 4 हों तथा उनके स्केलर गुणन का मान 6 हो, तो वेक्टरों के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

उत्तर– $\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$

अत: $\cos\theta = \dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{AB}$

दिया है, $(\vec{A}.\vec{B}) = 6$; $|\vec{A}| = A = 3$ तथा $|\vec{B}| = B = 4$

$\therefore \quad \cos\theta = \dfrac{6}{3\times 4} = \dfrac{1}{2} = \cos 60°$

अत: वेक्टरों $\vec{A}$ व $\vec{B}$ के बीच का कोण $\theta = 60°$

प्रश्न 13. यदि $\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$ तथा $B = 2\hat{i} - 5\hat{j}$ हो तब $\vec{A}.\vec{B}$ को ज्ञात कीजिए।

उत्तर– यदि $\vec{A} = A_x.\hat{i} + A_y.\hat{j} + A_z.\hat{k}$

तथा $\vec{B} = B_x.\hat{i} + B_y.\hat{j} + B_z.\hat{k}$

तो $\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z$

$$\vec{A}.\vec{B} = (3\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}).(2\hat{i} - 5\hat{j})$$
$$= 3\times 2 + 4(-5) + 6(0)$$
$$= 6 - 20 + 0 = -14$$

प्रश्न 14. यदि $\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ तथा $\vec{B} = 12\hat{i} - 5\hat{j}$ जहां $\hat{i}$ तथा j क्रमशः $+x$ तथा $+y$ अक्ष की दिशा में एकांक वेक्टर है। ज्ञात कीजिए– (i) $\vec{A}$ का परिमाण तथा (ii) $\vec{A}.\vec{B}$ का मान।

उत्तर– (i) $\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ की तुलना $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$ से करने पर, $A_x = 3$ तथा $A_y = 4$.

अत: $A = |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2}$

$= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ मात्रक

(ii) $A.B = (3\hat{i} + 4\hat{j}).(12\hat{i} - 5\hat{j})$

$= 36\,\hat{i}.\hat{i} - 15\hat{i}.\hat{j} + 48\hat{j}.\hat{i} - 20\hat{j}.\hat{j}$

परन्तु $\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = 1$

तथा $\hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{i} = 0$

$\therefore \quad A.B = 36 - 0 + 0 - 20 = 16$

प्रश्न 15. यदि सदिश $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ तथा सदिश $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$ के बीच का कोण θ हो, तो सिद्ध कीजिए कि,

$$\cos\theta = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}$$

उत्तर– $\vec{A}.\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}).$

$$(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$= A_xB_x\,\hat{i}.\hat{i} + A_xB_y\,\hat{i}.\hat{j} + A_xB_z\,\hat{i}.\hat{k}$$
$$A_yB_x\,\hat{j}.\hat{i} + A_yB_y\,\hat{j}.\hat{j} + A_yB_z\,\hat{j}.\hat{k}$$
$$+ A_zB_x\,\hat{k}.\hat{i} + A_zB_y\,\hat{k}.\hat{i} + A_zB_z\,\hat{k}.\hat{k}$$

$$\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

वेक्टर $\vec{A}$ व $\vec{B}$ के अदिश परिमाण (scalar magnitudes) क्रमश: $\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ तथा $\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$ हैं।

अत: $\cos\theta = \dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{AB}$

$$= \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}$$

प्रश्न 16. बल की परिभाषा दीजिये। बल कितने प्रकार के होते हैं? बल का मान तथा मात्रक लिखो।

उत्तर– बल की परिभाषा– बल वह धक्का या खिंचाव है जो एक निकाय से दूसरे निकाय पर आरोपित होता है। किसी वस्तु की विराम अवस्था अथवा रेखीय अवस्था को गति की अवस्था में परिवर्तित कर देता है। अथवा वस्तु की आकृति में परिवर्तन कर देता है। बल एक सदिश राशि है। इसका मात्रक 'न्यूटन' है।

बल के प्रकार– बल दो प्रकार के होते हैं।

1. गुरुत्वाकर्षण बल 2. स्थिर वैद्युत बल

1. गुरुत्वाकर्षण बल– किन्हीं दो पदार्थिक कणों के बीच लगने वाला बल उनके द्रव्यमान के गुणनफल के

समानुपाती और उनके बीच की दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होता है।

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

जहाँ m_1, m_2 = कणों के द्रव्यमान

r = उनके मध्य की दूरी

G = गुरुत्वाकर्षण नियतांक 6.67×10^{-11} Nm²/Kg²

2. स्थिर वैद्युत बल– इसे कूलॉम बल भी कहते हैं। यह कूलॉम के नियम द्वारा दिया जाता है।

$$F \propto \frac{q_1q_2}{r^2}$$

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}$$

जहां q_1q_2 = आवेश

r = उनके बीच की दूरी

जहां $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9$ N-m² /कूलॉम²

ϵ_0 = निर्वात की वैद्युतशीलता है।

3. अन्य बल: श्यान बल: द्रव व गैस की परतों के बीच लगने वाला बल।

ससंजक बल: एक ही पदार्थ के अणुओं के बीच लगने वाला बल

प्रत्यास्थ बल: यह बल बाहरी बल के विरुद्ध पदार्थ के अन्दर कार्य करता है।

क्षीण बल: रेडियोएक्टिव विघटन से सम्बन्धित होते हैं। इलेक्टॉन व न्यूटॉन के मध्य भी यह कार्य करते हैं।

बल का मात्रक: बल का मात्रक 'न्यूटन' होता है।

बल का मान: 1 न्यूटन =1 किग्रामीटर/सेकण्ड²

1 किग्राभार = 9.8 न्यूटन

1 न्यूटन = 10^5 डाइन

1 ग्राम भार = 980 डाइन

प्रश्न 17. संवेग को परिभाषित करते हुए संवेग परिवर्तन की व्याख्या कीजिये।

उत्तर– संवेग (Momentum)– किसी वस्तु के द्रव्यमान तथा वेग के गुणनफल को वस्तु का संवेग कहते हैं। संवेग सदिश राशि है। इसकी दिशा वेग की दिशा होती है। इसे $\vec{p}$ से प्रदर्शित करते हैं। अतः यदि किसी वस्तु का द्रव्यमान m हो तथा वेग $\vec{v}$ हो, तो

संवेग = द्रव्यमान × वेग

$$\vec{P} = m \times \vec{v}$$

इसका मात्रक द्रव्यमान × वेग के मात्रकों में ही लिखा जाता है। द्रव्यमान का मात्रक किग्रा है तथा वेग का मात्रक मीटर/सेकण्ड है। अतः संवेग का मात्रक किग्रा-मीटर/सेकण्ड है। इसे न्यूटन सेकण्ड भी लिख सकते हैं।

संवेग परिवर्तन– माना कि किसी पिण्ड का द्रव्यमान m है तथा प्रारम्भिक वेग $\vec{v_1}$ है। माना कि पिण्ड पर बाह्य बल $\vec{F}$ लगाने पर, Δt समयान्तराल में उसका वेग बढ़कर $\vec{v_2}$ हो जाता है। तब वस्तु का प्रारम्भिक संवेग

$$\vec{P_1} = m\vec{v_1}$$

वस्तु का Δt समयान्तराल के पश्चात् संवेग

$$\vec{P_2} = m\vec{v_2}$$

अतः Δt समयान्तराल में संवेग परिवर्तन

$$\vec{P_2} - \vec{P_1} = m\vec{v_2} - m\vec{v_1} = m(\vec{v_2} - \vec{v_1})$$

अथवा $\Delta\vec{p} = m\Delta\vec{v}$

दोनों ओर समयान्तराल Δt से भाग करने पर

$$\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

इस समीकरण $\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}$ में संवेग परिवर्तन की दर तथा $\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ पिंड के वेग परिवर्तन की दर है जिसे त्वरण $\vec{a}$ कहते हैं।

$$\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} = m\vec{a} \text{ है}$$

परन्तु $m\vec{a} = \vec{F}$ (न्यूटन का दूसरा नियम)

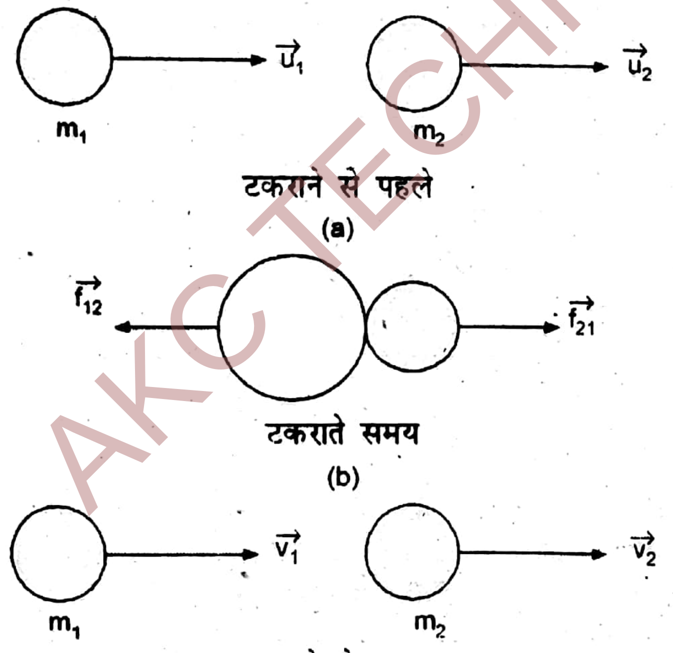
$$\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} = \vec{F}$$

अतः किसी वस्तु कें संवेग परिवर्तन की दर वस्तु पर लगे बाह्य बल के बराबर होती है तथा संवेग में परिवर्तन सदैव बल की दिशा में ही होता है। यह न्यूटन के दूसरे नियम का एक अन्य रूप है।

प्रश्न 18. संवेग संरक्षण के नियम का कथन देते हुए सूत्र की व्युत्पत्ति कीजिये।

उत्तर– संवेग संरक्षण का नियम (Law of conservation of Momentum)– यदि दो (अथवा अधिक) पिण्डों के समूह पर कोई बाह्य बल कार्य न करे तो समूह का संयुक्त संवेग नियत रहता है। इसे 'संवेग संरक्षण का नियम' कहते हैं।

उपपत्ति– माना कि m_1 व m_2 द्रव्यमान के दो चिकने गोलीय पिण्ड एक चिकने क्षैतिज तल पर एक ही दिशा में क्रमशः $\vec{u_1}$ व $\vec{u_2}$ वेग से चल रहे हैं। इनके संवेग क्रमशः $\vec{P_1} = m_1\vec{u_1}$ तथा $\vec{P_2} = m_2\vec{u_2}$ हैं। माना कि पिण्ड परस्पर सीधे टकराते हैं तथा फिर एक-दूसरे से अलग हो जाते हैं। टकराते समय वे एक-दूसरे पर बल आरोपित करते हैं जिसके कारण उनके संवेगों में परिवर्तन हो जाता है। माना कि पहले पिण्ड पर (दूसरे पिण्ड द्वारा) आरोपित बल $\vec{F_{12}}$ है तथा दूसरे पिण्ड में आरोपित बल $\vec{F_{21}}$ है। माना कि इन बलों के कारण पहले पिण्ड में संवेग परिवर्तन $\Delta\vec{P_1}$ है तथा दूसरे पिंड में $\Delta\vec{P_2}$ है। दोनों पिण्डों का संवेग परिवर्तन $\Delta\vec{P_1} + \Delta\vec{P_2}$ है।



चित्र–18

टकराते समय दोनों पिण्ड एक-दूसरे के स्पर्श में हैं, अतः इस समय वे एक ही संयुक्त पिण्ड के दो भाग हैं इस संयुक्त पिण्ड पर कोई बाह्य बल नहीं लग रहा है। अतः न्यूटन के दूसरे नियम के अनुसार संयुक्त पिण्ड में संवेग परिवर्तन नहीं होगा।

अर्थात्

$$\Delta\vec{P_1} + \Delta(\vec{P_1} + \vec{P_2}) = 0$$

$$\text{अथवा}\ \Delta(\vec{P_1} + \vec{P_2}) = 0$$

$\Delta(\vec{P_1} + \vec{P_2})$ दोनों पिण्डों के संयुक्त संवेग में होने वाले परिवर्तन को व्यक्त करता है। दोनों पिण्डों से बने इस समूह का संवेग नियत रहता है, अर्थात्

$\vec{P_1} + \vec{P_2}$ नियतांक

अथवा $m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2}$ = नियतांक

यही संवेग संरक्षण का नियम है।

अतः यदि टकराने के पश्चात् पिण्डों के वेग क्रमशः $\vec{v_1}$ व $\vec{v_2}$ हो जायें अर्थात् उनके संवेग क्रमशः $m_1\vec{v_1}$ व $m_2\vec{v_2}$ हो जाएं तो

$$m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$$

$$-m_1(\vec{v_1} - \vec{u_1}) = m_2(\vec{v_2} - \vec{u_2})$$

इससे स्पष्ट है कि पिण्ड में जितना संवेग परिवर्तन होता है, दूसरे में भी उतना ही संवेग परिवर्तन विपरीत दिशा में हो जाता है।

प्रश्न 19. बल का आवेग (inpulse) क्या होता है?

उत्तर– दैनिक जीवन में ऐसे अनेक उदाहरण मिलते हैं जबकि किसी वस्तु पर एक बड़ा बल थोड़े समयान्तराल के लिए लगाया जाता है। जैसे बल्ले द्वारा क्रिकेट की गेंद पर चोट मारकर गेंद को दूर भेजना, छड़ी द्वारा पिंगपोंग की गेंद को पाले में भेजना इत्यादि। इस दशा में बल और समयान्तराल के गुणनफल को बल का आवेश कहते हैं। यदि किसी पिण्ड पर एक नियत बल $\vec{F}$ को Δt समयान्तराल के लिए लगाया जाये तो इस बल का आवेग $\vec{F}\Delta t$ होगा। आवेग एक सदिश राशि है। इसकी दिशा वही होती है जो बल की है।

माना कि किसी पिण्ड का द्रव्यमान m है। इस पर नियत बल $\vec{F}$ को Δt समयान्तराल के लिए लगाने पर वेग में $\Delta\vec{F}$ का परिवर्तन हो जाता है। तब न्यूटन के नियम के अनुसार

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

अथवा $\vec{F}\Delta t = m\Delta\vec{v}$

परन्तु $m\Delta\vec{v} = \Delta\vec{p}$

$\therefore$ $\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p}$

इसी प्रकार किसी पिण्ड को दिया गया आवेग पिण्ड में उत्पन्न संवेग परिवर्तन के बराबर होता है।

प्रश्न 20. बन्दूक के प्रतिक्षेप (Recoil of gun) में संवेग संरक्षण के अनुप्रयोग को समझाइये।

उत्तर– बन्दूक का प्रतिक्षेप वेग– जब बन्दूक से गोली दागी जाती है तो बन्दूक गोली छूटने की दिशा की विपरीत दिशा में गति कर जाती है अर्थात् प्रतिक्षेप करती है। यदि m द्रव्यमान की गोली v वेग से बन्दूक से बाहर निकलती है तथा M द्रव्यमान की बन्दूक V वेग से प्रतिक्षेप करती है, तो संवेग संरक्षण के नियम से,

गोली छूटने के बाद बन्दूक व गोली का संयुक्त संवेग = छूटने से पूर्व संयुक्त संवेग

$$M \times V + m \times v = 0$$

या $MV = -mv$

या $$V = -\left(\frac{m}{M}\right)v$$

यहाँ ऋणात्मक चिह्न बतलाता है कि बन्दूक, गोली की विपरीत दिशा में गति करती है। चूँकि $m << M$, अत: $V << v$, अर्थात् बन्दूक का प्रतिक्षेप वेग गोली के वेग से बहुत कम होता है।

प्रश्न 21. दैनिक जीवन में आवेग (Impulse) के अनुप्रयोगों की व्याख्या कीजिये।

उत्तर–दैनिक जीवन में आवेग के अनुप्रयोग निम्नलिखित हैं–

1. क्रिकेट के खेल में खिलाड़ी तेजी से आती हुई गेंद को पकड़ते समय अपने हाथ पीछे की ओर खींचता है– क्रिकेट की गेंद निश्चित संवेग से खिलाड़ी की ओर आती है। जब खिलाड़ी **'कैच'** लेता है तब गेंद खिलाड़ी के हाथों में टक्कर मारती है। टक्कर के पश्चात् गेंद का संवेग शून्य हो जाता है। गेंद द्वारा हाथ पर लगाया गया बल (F) इस बात पर निर्भर करेगा कि गेंद का यह संवेग-परिवर्तन (Δp) कितने समय (Δt) में होता है। यदि गेंद को एकदम रोक दिया जाये तो Δt का मान अति अल्प होगा तथा समीकरण $F.\Delta t = \Delta p$ के अनुसार हाथ पर लगने वाला बल बहुत अधिक होगा जिससे उसके हाथ में चोट आने की सम्भावना रहेगी। इसके विपरीत यदि खिलाड़ी गेंद रोकने में अधिक समय लगाकर Δt का मान बढ़ा ले तो हाथ पर लगने वाला बल बहुत कम हो जायेगा। यही कारण है कि खिलाड़ी गेंद को कैच लेते समय अपना हाथ पीछे की ओर खींचता है।

2. पक्के फर्श पर कूदने की तुलना में कच्चे फर्श, रेत या बालू पर कूदने में कम चोट लगती है– इसका कारण यह है कि पक्के फर्श पर पैर तुरन्त ही स्थिर हो जाते हैं परन्तु कच्चे फर्श अथवा रेत पर कूदने पर पैर धँसते हैं, अत: वे धीरे-धीरे स्थिर होते हैं। अत: Δt का मान अधिक हो जाता है। इसलिए $F = \Delta p/\Delta t$ के अनुसार F (बल) कम हो जाता है और चोट कम लगती है।

3. सर्कस का कलाकार बहुत ऊँचाई से, नीचे तनी हुई जाली पर कूदता है। जब पैर जाली पर पड़ते हैं तो वह नीचे धँस जाती है, अत: पैरों को स्थिर होने में अपेक्षाकृत अधिक समय लगता है। इस प्रकार Δt बल जाने से $F = \Delta p/\Delta t$ से बल का मान कम हो जाता है और कलाकार को कम चोट लगती है।

4. चीनी मिट्टी का बर्तन या काँच या गिलास यदि पक्के फर्श पर गिरता है तो उसके टूटने की सम्भावना अधिक होती है परन्तु जब वह कच्चे फर्श पर गिरता है तो वह प्राय: नहीं टूटता है। कच्चा फर्श मुलायम होता है और बर्तन के गिरने पर उसके साथ थोड़ा-सा नीचे धँस जाता है। अत: Δt बढ़ जाता है और बल कम लगता है। पक्का फर्श धँसता नहीं है, अत: Δt लगभग शून्य ही हो जाता है, इससे बहुत अधिक चोट लगती है और बर्तन टूट सकता है।

5. काँच या चीनी मिट्टी के बर्तनों को ट्रांसपोर्ट द्वारा दूर स्थान ले जाने के लिए पैकिंग करते समय उन्हें घास एवं कागज के टुकड़ों में लपेट कर एक-दूसरे से अलग करके रखते हैं जिससे सामान बिना टूटे निर्धारित स्थान पर सुरक्षित पहुँच जाये। घास या कागज के टुकड़े झटका लगते समय धँस जाते हैं और इस प्रकार वे आघात के समय Δt को बढ़ा देते हैं। इससे आघाती बल का परिमाण बहुत कम हो जाता है, अत: काँच या चीनी मिट्टी का सामान नहीं टूटता है।

6. मोटर साइकिल, स्कूटर आदि स्वचालित वाहनों में शॉक एब्जार्बर लगाये जाते हैं। इनकी रचना ऐसी होती है कि जब वाहन खराब सड़क पर चलता है तो झटका लगने पर आघात का समय बढ़ जाता है। अत: सवार को अधिक झटका महसूस नहीं होता है।

प्रश्न 22. एक रॉकेट में 0.50 किग्रा॰ प्रति सेकण्ड की दर से ईंधन जलता है। ईंधन के जलने से रॉकेट से गैस 30 किमी॰/सेकण्ड के वेग से बाहर निकलती है। ज्ञात कीजिये गैस द्वारा रॉकेट पर कितना बल आरोपित किया जा रहा है।

उत्तर– रॉकेट में एक सेकण्ड मे जलाये गए ईंधन का द्रव्यमान= 0.50 किग्रा.

गैस निकलने की दर $= 30$ km/sec

$= 30 \times 10^3$ m/sec

$\because$ आरोपित बल = संवेग परिवर्तन की दर

$$= \frac{\text{द्रव्यमान} \times \text{वेग}}{\text{समय}}$$

$$= \frac{m \times v}{t}$$

$$= \frac{(0.50 \text{ किग्रा}) \times (30 \times 10^3 \text{ मीटर})}{1 \text{ सेकण्ड}}$$

$= 0.50 \times 30 \times 10^3$ kg-m/sec

$= 15 \times 10^3$ Newton

प्रश्न 23. एक पिण्ड का संवेग एक मिनट में 500 किग्रा-मीटर/सेकण्ड से बढ़कर 800 किग्रा-मीटर/सेकण्ड हो जाता है। आरोपित बल की गणना कीजिये।

उत्तर– संवेग परिवर्तन $(\Delta p) = 800 - 500$

$= 300$ kg–m/sec

समयान्तराल $\Delta t = 1$ मिनट $= 60$ सेकण्ड

न्यूटन के द्वितीय नियम के अनुसार किसी वस्तु के संवेग परिवर्तन की दर वस्तु पर लगे बाह्य-बल F के बराबर होती है।

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{300}{60} = 5 \text{ Newton}$$

प्रश्न 24. ब्रेक लगने से किसी कार का वेग 20 मी॰/से॰ से घटकर 10 सेकण्ड बाद 10 मीटर/से॰ हो जाता है। यदि कार का द्रव्यमान 100 kg है तो ब्रेक द्वारा लगाये गये बल की गणना कीजिए।

उत्तर– कार का प्रारम्भिक वेग $u = 20$ मीटर/सेकण्ड,

अन्तिम वेग $v = 10$ मी./से.

तथा समय $t = 10$ सेकण्ड

माना कार में त्वरण a है।

समीकरण $v = u + at$ से,

$$= \frac{v-u}{t} = \frac{10-20}{10} = -1.0 \text{ मी./से.}^2$$

ब्रेक लगाने पर कार में 1.0 मीटर/सेकण्ड^2 का 'मंदन' उत्पन्न होता है।

$\therefore$ ब्रेक द्वारा उत्पन्न बल, $F = m \times a$

$= 100$ किग्रा $\times$ (–1.0 मीटर/सेकण्ड^2)

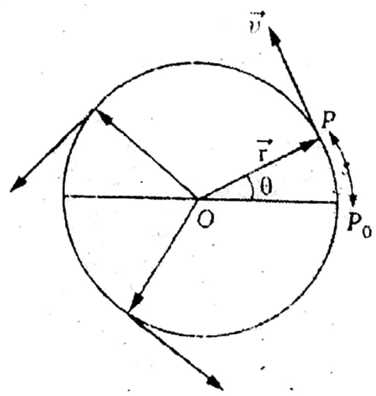
$= -100$ न्यूटन

ऋणात्मक चिह्न यह बताता है कि ब्रेक द्वारा उत्पन्न बल प्रतिरोध बल है।

प्रश्न 25. एक समान वृत्तीय गति को चित्र की सहायता से विस्तार में समझाइये।

उत्तर– एक समान वृत्तीय गति (Uniform circular motion)– जब कोई कण एक निश्चित बिन्दु (Fixed Point) के चारों ओर एकसमान चाल से इस प्रकार गति करता है कि इस बिन्दु से उसकी दूरी सदैव नियत रहती है तो कण की गति-पथ वृत्ताकार होता है। यह निश्चित बिन्दु कण के वृत्ताकार पथ का केन्द्र होता है तथा इस बिन्दु से कण तक की दूरी इस पथ की त्रिज्या होती है। कण की इस प्रकार की गति को एकमसान वृत्तीय गति (uniform circular motion) कहते हैं।

यह गति भी एक समतल में गति का उदाहरण है जिसमें त्वरण का परिमाण तो नियत रहता है परन्तु दिशा निरन्तर बदलती रहती है।



चित्र–19

संलग्न चित्र– में एक निश्चित बिन्दु O के चारों ओर एकसमान चाल v से चलते हुए कण की एकसमान वृत्तीय गति को दिखाया गया है। इस प्रकार की गति में किसी क्षण

t पर गतिमान कण की स्थिति (position) को कोण θ द्वारा व्यक्त किया जाता है, जहाँ θ वह कोण है जो उस क्षण कण को इसके वृत्ताकार पथ के केन्द्र O से मिलाने वाली रेखा जैसे OP किसी निश्चित रेखा OP_0 से बनाती है। यहाँ P_0 वृत्ताकार पथ पर कण की प्रारम्भिक स्थिति है। वेक्टर रेखा $\overline{OP}$ त्रिज्य वेक्टर (radial vector) कहलाती है। एकसमान वृत्तीय गति में किसी क्षण कण के वेग की दिशा उस क्षण वृत्ताकार पथ पर कण की स्थिति बिन्दु पर खींची गयी स्पर्श रेखा की दिशा में होती है। चूँकि स्पर्शी सदैव त्रिज्या पर लम्ब होती है, अत: एकसमान वृत्तीय गति में वेग वेक्टर $\vec{v}$ त्रिज्य वेक्टर $\vec{r}$ के सदैव लम्बवत् रहता है। जैसे-जैसे त्रिज्य वेक्टर की दिशा बदलती है, कण के वेग वेक्टर की दिशा भी बदलती रहती है, जबकि इसका परिमाण (कण की एकसमान चाल v) सदैव नियत रहता है।

प्रश्न 26. परिवर्ती वृत्तीय गति (Non-uniform) को चित्र सहित स्पष्ट कीजिए।

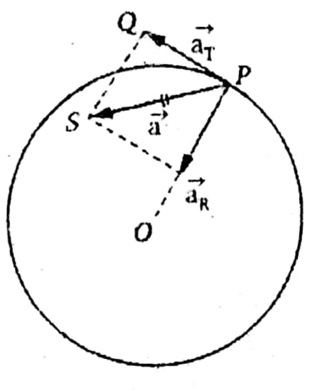
उत्तर– परिवर्ती या असमान वृत्तीय गति (Non-uniform circular motion)– यदि कण की वृत्तीय गति एक समान न होकर परिवर्ती हो तो कण की इस प्रकार की गति मे त्रिज्य त्वरण (a_R) के साथ-साथ स्पर्श रेखीय त्वरण (a_T) भी होता है। ये दोनों त्वरण संलग्न चित्र की भांति परस्पर लम्बवत् होते हैं। अत: ऐसी दशा में कण का परिणामी त्वरण

$$a = \sqrt{a_R^2 + a_T^2}$$

यदि कण का द्रव्यमान m है,

तो स्पर्श रेखीय बल $= ma_T$

कण की परिवर्ती वृत्तीय गति में कण के त्रिज्य त्वरण व स्पर्श रेखीय त्वरण दोनों परिवर्ती होते हैं। अत: कण का परिणामी त्वरण $\vec{a}$ भी परिवर्ती होता है तथा यह वृत्त के केन्द्र की ओर दिष्ट नहीं होता।



चित्र–20.

प्रश्न 27. निम्नलिखित को परिभाषित कीजिये–

(i) कोणीय विस्थापन (Angular Displacement)

(ii) कोणीय वेग (Angular Velocity)

(iii) कोणीय त्वरण (Angular acceleration)

उत्तर– (i) कोणीय विस्थापन– एक समान वृत्तीय गति करते हुए कण की त्रिज्य वेक्टर एक निश्चित समयान्तराल में जितना कोण घूम जाती है वह गतिमान कण का कोणीय विस्थापन कहलाता है।

(ii) **कोणीय वेग–** वृत्तीय गति करते हुए कण द्वारा 1 सेकण्ड में वृत्त के केन्द्र पर अन्तरित कोण को इसका कोणीय वेग कहते हैं। इसे ω (ओमेगा)से प्रदर्शित करते हैं।

(iii) **कोणीय त्वरण–** किसी पिण्ड के कोणीय वेग परिवर्तन की दर अर्थात् एकांक समय में कोणीय वेग में होने वाले परिवर्तन को इस पिण्ड का कोणीय त्वरण कहते हैं। इसको ग्रीक अक्षर α (अल्फा) से प्रदर्शित करते हैं।

प्रश्न 28. निम्नलिखित को परिभाषित कीजिए।

(i) आवृत्ति (Frequency)

(ii) आवर्तकाल (Time Period)

(iii) आयाम (Amplitude)

उत्तर–(i) आवृत्ति– "सरल आवर्त गति करता हुआ कण एक सेकण्ड में जितने दोलन पूरे करता है, उसे उसकी आवृत्ति कहते हैं।" इसको n से व्यक्त करते हैं।

चूंकि आवृत्ति, आवर्तकाल के व्युत्क्रम के बराबर होती है अर्थात् $n = 1/T$

$$n = \frac{\omega}{2\pi} \qquad ...(i)$$

ω को सरल आवर्त गति करते हुए कण N की कोणीय आवृत्ति भी कहते हैं, जबकि ω निर्देश वृत्त पर गतिमान कण का कोणीय वेग है।

(ii) **आवर्तकाल–** सरल आवर्त गति करते हुए कण द्वारा अपनी साम्य स्थिति के परित: एक दोलन पूरा करने में जितना समय लगता है, वह उसका आवर्तकाल T होता है।

उपर्युक्त से स्पष्ट होता है कि जितने समय में निर्देश वृत्त पर एकसमान वृत्तीय गति करता हुआ कण P एक चक्कर पूरा करता है अर्थात् यह X से चलकर पुन: X पर लौट आता है ठीक उतने ही समय में उसका प्रक्षेप N (अर्थात् सरल आवर्त गति करता हुआ कण) O के परित: अपना 1 दोलन पूरा करता है।

अतः सरल आवर्त गति का आवर्तकाल–

T = निर्देश वृत्त पर एक चक्कर का समय

$$= \frac{\text{1 चक्कर में कण } P \text{ द्वारा घूमा कोण}}{\text{कण } P \text{ का कोणीय वेग}}$$

अर्थात् $$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad ...(ii)$$

(iii) **आयाम–** सरल आवर्त गति करते हुए कण का उसकी साम्य स्थिति के किसी ओर अधिकतम विस्थापन उसका आयाम कहलाता है।

प्रश्न 29. रेखीय एवं कोणीय वेग के बीच सम्बन्ध स्थापित कीजिये।

उत्तर– रेखीय एवं कोणीय वेग के बीच सम्बन्ध– जब एक समान वृत्तीय गति करता कण Δt समायान्तराल में वृत्त की परिधि पर Δs दूरी तय करता है तो कण का कोणीय विस्थापन

$\Delta\theta = \Delta s/r$ (जहाँ r = वृत्ताकार पथ की त्रिज्या)

दोनों पक्षों में Δt से भाग देने पर

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{1}{r}\cdot\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)$$

यदि समायान्तराल को छोटा करते चले जायें अर्थात् $\Delta t \to 0$ तो

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right) = \frac{1}{r}\lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) \qquad ...(1)$$

परन्तु परिभाषा के अनुसार

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right) = \text{तात्क्षणिक कोणीय वेग } \omega$$

तथा $$\lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = \text{तात्क्षणिक रेखीय वेग } v$$

∴ ये मान समीकरण (1) में रखने पर

$$\omega = \frac{v}{r}$$

अथवा $$v = r\omega \qquad ...(2)$$

अर्थात् रेखीय वेग = त्रिज्या × कोणीय वेग

इस सूत्र से स्पष्ट है कि ω के नियत मान के लिए $v \propto r$ अर्थात् कण का रेखीय वेग वृत्ताकार पथ के केन्द्र से कण की दूरी अर्थात् वृत्ताकार पथ की त्रिज्या r के अनुक्रमानुपाती होता है। अतः नियत कोणीय वेग से गति करता हुआ कोई कण केन्द्र से जितनी अधिक दूरी पर चल रहा होता है उसका रेखीय वेग भी उतना ही अधिक होगा।

प्रश्न 30. कोणीय एवं रेखीय त्वरण में सम्बन्ध स्थापित कीजिये।

उत्तर– कोणीय त्वरण एवं रेखीय त्वरण में सम्बन्ध– माना पिण्ड के किसी कण की घूर्णन अक्ष से दूरी 'r' है। पिण्ड के घूर्णन गति करने पर यह कण r त्रिज्या के वृत्ताकार पथ पर गति करेगा। यदि किसी क्षण इस कण का तात्कालिक वेग v है तो $v = r\omega$ जहाँ ω पिण्ड के उस कण का अर्थात् पिण्ड का कोणीय वेग है। इससे $\omega = \frac{v}{r}$,

अतः पिण्ड का कोणीय त्वरण,

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v}{r}\right) = \frac{1}{r} = \left(\frac{dv}{dt}\right)$$

[क्योंकि r कण के लिए नियत है।]

$\because \quad \frac{dv}{dt}$ = कण का रेखीय त्वरण $a \therefore \alpha = \frac{a}{r}$

अथवा $\quad a = r \times \alpha$

अतः "पिण्ड के किसी कण का रेखीय त्वरण पिण्ड के कोणीय त्वरण तथा उस कण की घूर्णन अक्ष से दूरी के गुणनफल के बराबर होता है।"

प्रश्न 31. 10 किग्रा. का एक पिण्ड 1000 चक्कर प्रति मिनट की दर से 0.40 मीटर व्यास के वृत्त में घूम रहा है। इसका रेखीय वेग तथा अभिकेन्द्रीय त्वरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर– कण के वृत्तीय पथ की त्रिज्या

$$r = \frac{\text{व्यास}}{2} = \frac{0.40}{2} = 0.20 \text{ मीटर}$$

घूर्णन आवृत्ति, n = 1000 चक्कर/मिनट

$$= \frac{1000}{60} \text{ चक्कर/से.}$$

$$= \frac{50}{3} \text{ चक्कर/से.}$$

कोणीय वेग $\omega = 2\pi n = 2\pi \times \frac{50}{3}$

$$= \frac{100}{3}\pi \text{ रेडियन/से}$$

$\therefore$ रेखीय वेग $v = r\omega = 0.20 \times \frac{100}{3}\pi = \frac{20}{3}\pi$ मी./से

$= \frac{20}{3} \times 3.14 = 20.93$ मी./से

अभिकेन्द्रीय त्वरण,

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(\frac{20}{3}\pi\right)^2}{0.20} = \frac{2000}{9}\pi^2$$

$$= \frac{2000 \times 3.14 \times 3.14}{9}$$

$= 2191.02$ मी./से^{2}

प्रश्न 32. किसी दीवार घड़ी की घण्टे वाली तथा मिनट वाली सुइयों की लम्बाइयाँ क्रमशः 4 सेमी. तथा 6 सेमी. है। दोनों सुईयों के सिरों के रेखीय वेगों का अनुपात ज्ञात कीजिये।

उत्तर– r त्रिज्या के वृत्तीय पथ में रेखीय वेग (v) तथा कोणीय वेग ω में सम्बन्ध है।

$$v = r\omega$$

यदि कण का आवर्तकाल T हो, तो $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$v = r\frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi r}{T} \quad ...(1)$$

माना घण्टे वाली सुई के सिरे का रेखीय वेग v_1 तथा मिनट वाली सुई के सिरे का रेखीय वेग v_2 है। घण्टे वाली सुई की लम्बाई $r_1 = 4$ सेमी, घण्टे वाली सुई का आवर्तकाल $T_1 = 12$ घण्टे। मिनट वाली सुई की लम्बाई $r_2 = 6$ सेमी। मिनट वाली सुई का आवर्तकाल $T_2 = 1$ घण्टा

$\therefore$ घण्टे वाली सुई के सिरे का रेखीय वेग

$$v_1 = \frac{2\pi r_1}{T_1}$$

मिनट वाली सुई के सिरे का रेखीय वेग $v_2 = \frac{2\pi r_2}{T_2}$

$$\therefore \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{(2\pi r_1/T_1)}{(2\pi r_2/T_2)} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

$$= \frac{4 \text{ सेमी}}{6 \text{ सेमी}} \times \left(\frac{1 \text{ घण्टा}}{12 \text{ घण्टा}}\right) = \frac{4}{6 \times 12} = \frac{1}{18}$$

$\therefore \quad v_1 : v_2 = 1:18$

प्रश्न 33. गाड़ी के एक पहिये का व्यास 1 मीटर है। गाड़ी 2 चक्कर प्रति सेकण्ड के प्रारम्भिक कोणीय वेग तथा 3 चक्कर/सेकण्ड^2 के एक समान कोणीय त्वरण से चलना प्रारम्भ करती है। 10 सेकण्ड बाद ज्ञात कीजिए– (*i*) पहिये द्वारा तय की गयी दूरी (*ii*) पहिये का रेखीय वेग (*iii*) इस क्षण की परिधि पर स्थित कण का स्पर्श रेखीय त्वरण।

उत्तर– (*i*) प्रारम्भिक कोणीय वेग $\omega_0 = 2$ चक्कर/सेकण्ड समयान्तराल $t = 10$ सेकण्ड, कोणीय त्वरण $\alpha = 3$ चक्कर/सेकण्ड^2। इस समयान्तराल में पहिये का कोणीय विस्थापन

$$\theta = \omega_0 \times t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\theta = 2 \times 10 + \frac{1}{2} \times 3 \times 10^2 = 170 \text{ चक्कर}$$

$= 170 \times 2\pi$ रेडियन

$= 340\pi$ रेडियन

पहिये की त्रिज्या r = व्यास/2 = 1 मीटर/2 = 0.5 मीटर

$\therefore$ पहिये द्वारा तय की गयी दूरी

$s = r\theta = 0.5 \times 340\pi$ मीटर

$= 170 \times 3.14$

$= 533.8$ मीटर

(*ii*) $t = 10$ सेकण्ड पर कोणीय वेग

$\omega = \omega_0 + \alpha t = 2 + 3 \times 10 = 32$ चक्कर/सेकण्ड

$= 32 \times 2\pi$ रेडियन/सेकण्ड

$\therefore$ रेखीय वेग $v = r \times \omega = 0.5 \times 32 \times 2\pi$ मी./से

$= 0.5 \times 32 \times 2 \times 3.14$ मी./से

$= 100.48$ मी./से

(*iii*) कण का स्पर्श रेखीय त्वरण

$a_T = r\alpha = 0.5 \times (3 \times 2\pi)$मी./से^{2}

$= 0.5 \times 3 \times 2 \times 3.14$ मी/से^{2}

$= 9.42$ मी/से^{2}

प्रश्न 34. केन्द्रीय बल को परिभाषित कीजिये। इसकी क्या विशेषताएँ हैं? केन्द्रीय बल के उदाहरण दीजिए। (2010, 2011)

उत्तर– केन्द्रीय बल: केन्द्रीय बल सदैव एक स्थिर बिन्दु की ओर या उससे दूर की ओर लगता है तथा जिसका

परिमाण स्थिर बिन्दु से दूरी पर निर्भर करता है, केन्द्रीय बल कहलाता है। **विशेषता: केन्द्रीय बल सदैव एक स्थिर बिन्दु की ओर या उससे दूर की ओर लगता है। इसका उस बिन्दु के परितः कोई आघूर्ण नहीं होता है। अतः केन्द्रीय बल के अंतर्गत गति करते कण पर कोई बल आघूर्ण कार्य नहीं करता है।**

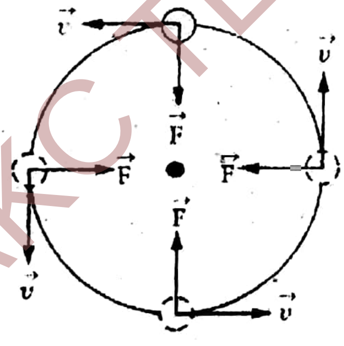
उदाहरण:

1. दो द्रव्यमानों के बीच गुरुत्वाकर्षण बल
2. दो स्थिर विद्युत आवेशों के बीच स्थिर वैद्युत बल

प्रश्न 35. अभिकेन्द्र बल को समझाते हुए इसके सूत्र की व्युत्पत्ति कीजिये एवं अनुप्रयोग लिखिए।

उत्तर– अभिकेन्द्र बल: हम जानते हैं कि जब कोई कण अथवा पिण्ड एक समान चाल v से r त्रिज्या के वृत्तीय पथ पर गति करता है तो उसकी गति में एक (अभिकेन्द्र) त्वरण होता है जिसका परिमाण (v^2/r) तो अचर रहता है, परन्तु दिशा लगातार बदलती रहती है तथा सदैव वृत्त के केन्द्र की ओर रहती है। न्यूटन के गति विषयक नियम से, वस्तु में त्वरण किसी बल से ही उत्पन्न हो सकता है तथा बल की दिशा वही होती है जो त्वरण की दिशा है। अतः यह स्पष्ट है कि वृत्तीय गति करते पिण्ड पर एक बल कार्य करता है जिसकी दिशा सदैव वृत्त के केन्द्र की ओर दिष्ट (directed) रहती है (चित्र)। इस बल को 'अभिकेन्द्र बल' कहते हैं। इसके बिना वृत्तीय गति सम्भव नहीं है। यदि वृत्तीय गति करते पिण्ड का द्रव्यमान m हो तो अभिकेन्द्र बल $\vec{F}$ का परिमाण

F = द्रव्यमान × अभिकेन्द्र त्वरण



चित्र–21.

अर्थात् $F = m \times (v^2/r)$

या $$F = \frac{mv^2}{r} \quad ...(1)$$

यदि अभिकेन्द्र त्वरण का मान $r\,\omega^2$ प्रयुक्त करें तो

$$F = mr\omega^2 \quad ...(2)$$

इस प्रकार हम देखते हैं कि कोई वस्तु जिसका द्रव्यमान m है, v चाल से किसी r त्रिज्या के वृत्ताकार पथ पर तब ही चलेगी जब उस पर लगातार एक बल जिसका परिमाण (mv^2/r) अथवा $mr\,\omega^2$ है, वृत्त के केन्द्र की ओर कार्य करता रहेगा। जब तक वस्तु पर यह बल कार्य करता रहेगा वह वृत्ताकार पथ पर घूमती रहेगी।

अभिकेन्द्र बल विशेष प्रकार का कोई नया बल नहीं है बल्कि प्रकृति में पाये जाने वाले विभिन्न बलों, जैसे– घर्षण बल (frictional force) गुरुत्वीय बल (gravitational force), प्रत्यास्थ बल (elastic force) आदि में से कोई भी अभिकेन्द्र बल का कार्य कर सकता है। दैनिक जीवन में ऐसी अनेक घटनाएँ हैं जिनमें अभिकेन्द्र बल क्रियाशील होता है।

अनुप्रयोग– इसके निम्नलिखित अनुप्रयोग हैं–

(*i*) वृत्ताकार मोड़ पर वाहनों के मुड़ने में।

(*ii*) वृत्ताकार मोड़ पर साइकिल सवार का साइकिल मोड़ने पर।

(*iii*) मोड़ पर सड़कों व रेल की पटरी में ढलान रखने में।

प्रश्न 36. अपकेन्द्र बल से आप क्या समझते हैं?

उत्तर– अपकेन्द्र बल: वृत्ताकार मार्ग में गति करती वस्तु पर केन्द्र की ओर लगने वाले बल को अभिकेन्द्र बल कहते हैं। इसका क्रिया के विरुद्ध प्रतिक्रिया के नियम से वस्तु द्वारा घुमाने वाले पिण्ड पर केन्द्र से बाहर की ओर लगने वाला बल अपकेन्द्र बल कहलाता है। यह एक काल्पनिक बल होता है।

जैसे A पिण्ड B वस्तु को r त्रिज्या के वृत्त में v वेग से घुमाता है, तो B पर अभिकेन्द्र बल $F_1 = \frac{mv^2}{r}$ होगा। एंव B द्वारा A पर केन्द्र से बाहर की ओर अपकेन्द्र बल $F_2 = \frac{mv^2}{r}$ ही होगा।

प्रश्न 37. मोड़ पर सड़कों व रेल की पटरी में ढलान रखा जाने में अभिकेन्द्र बल की भूमिका का वर्णन कीजिये।

उत्तर–(क) जब कार तथा सड़क के बीच घर्षण बल नगन्य है– सड़क पर मोटरकार को अथवा पटरी पर रेलगाड़ी को किसी मोड़ पर मुड़ते समय अभिकेन्द्र बल चाहिए। परन्तु ये सड़क या पटरी पर लम्बवत् ही रह सकते हैं। इस कारण इन्हें मुड़ते समय पर्याप्त अभिकेन्द्र बल नहीं मिल पाता तथा पहियों के अधिक घिसने तथा गाड़ी के गिरने की सम्भावना रहती है। अतः इसके लिए एक उपाय किया जाता है। **जब सड़क बनायी जाती है तभी सड़क के मोड़ों पर अन्दर की ओर ढलान बना देते हैं।** इसी प्रकार रेल की

पटरियां को बिछाते समय मोड़ पर बाहर की ओर पटरी को अन्दर की पटरी की तुलना में कुछ ऊँचा उठा देते हैं। ऐसा करने से मोटरकार अथवा रेलगाड़ी, मोड़ को पार करते समय स्वयं ही अन्दर की ओर झुक जाती है और आवश्यक अभिकेन्द्र बल मिल लाता है। ध्यान रहे, यह अभिकेन्द्र बल पृथ्वी (अथवा पटरी) की अभिलम्ब प्रतिक्रिया से उत्पन्न होता है।

चित्र– में क्षैतिज से θ कोण पर उठी हुई सड़क है जिस पर कोई गाड़ी v चाल से जा रही है। गाड़ी का भार mg गाड़ी के गुरुत्व केन्द्र G पर कार्य करता है। यदि मोड़ के केन्द्र की ओर व बाहर की ओर वाले पहिये पर सड़क की प्रतिक्रियाएँ क्रमशः R_1 व R_2 हों तो इनका परिणामी $R = (R_1 + R_2)$ गाड़ी के गुरुत्व-केन्द्र G से गुजरेगा। यह ऊर्ध्वाधर दिशा से θ कोण बनायेगा। इस दशा में R का ऊर्ध्वाधर घटक $R\cos\theta$ गाड़ी के भार mg को सँभालता है तथा क्षैतिज घटक $R\sin\theta$ आवश्यक अभिकेन्द्र बल mv^2/r प्रदान करता है।

अतः $$R\sin\theta = \frac{mv^2}{r} \qquad ...(1)$$

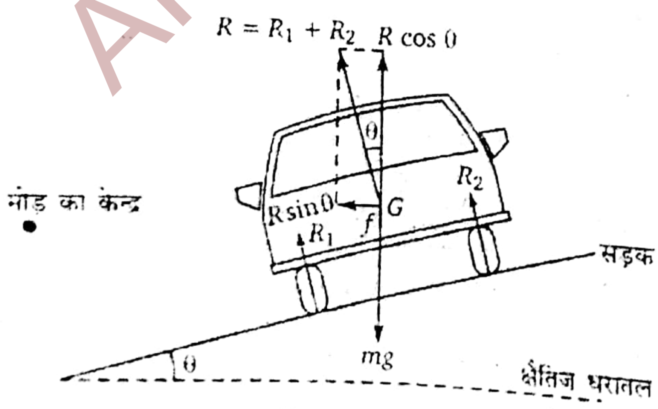
तथा $$R\cos\theta = mg \qquad ...(2)$$

समी॰ (1) को समी॰ (2) से भाग देने पर

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg} \qquad ...(3)$$

सूत्र (3) से स्पष्ट है कि किसी मोड़ का ढलान θ गाड़ी की किसी एक चाल के लिए ही उपयुक्त है, सभी चालों के लिए नहीं। इसलिए ड्राइवर को मोड़ पर ढलान के अनुकूल गाड़ी की चाल रखनी पड़ती है।

(ख) जब कार तथा सड़क के बीच घर्षण बल भी लग रहा है–इस स्थिति में कार को सड़क के ढाल तथा घर्षण दोनों से अभिकेन्द्र बल प्राप्त होता है। चित्र में कार का भार mg ढालू सड़क की अभिलम्ब प्रतिक्रिया R तथा सड़क के पहियों के बीच घर्षण बल f संलग्न चित्र में कार के गुरुत्व केन्द्र G पर दिखाये गये हैं।



चित्र–22

चित्र से, $$R\cos\theta - f\sin\theta = mg \qquad ...(1)$$

तथा क्षैतिज घटक आवश्यक अभिकेन्द्र बल प्रदान करते हैं।

$$\therefore \quad R\sin\theta + f\cos\theta = \frac{mv^2}{r} \qquad ...(2)$$

हम जानते हैं कि अधिकतम घर्षण-बल के लिए $f = \mu R$, समी॰ (1) व (2) में f का मान रखने पर,

$$R(\cos\theta - \mu\sin\theta) = mg \qquad ...(3)$$

$$R(\sin\theta + \mu\cos\theta) = \frac{mv^2}{r} \qquad ...(4)$$

समी॰ (4) को समी॰ (3) से भाग करने पर

$$\frac{v^2}{rg} = \frac{\sin\theta + \mu\cos\theta}{\cos\theta - \mu\sin\theta} = \frac{\tan\theta + \mu}{1 - \mu\tan\theta}$$

$$v = \sqrt{rg\left(\frac{\tan\theta + \mu}{1 - \mu\tan\theta}\right)}$$

यह चाल कार के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करती। अतः यह किसी नियत ढलान वाले मोड़ पर सभी वाहनों के लिए समान है। मोड़ पर इस चाल से चलने पर पहियों तथा सड़क के बीच किसी घर्षण बल की आवश्यकता नहीं होती तथा कार के टायरों की न्यूनतम हानि होती है।

प्रश्न 38. वृत्ताकार मोड़ पर साइकिल सवार का साइकिल मोड़ने में अभिकेन्द्र बल की आवश्यकता का वर्णन कीजिये।

उत्तर– वृत्ताकार मोड़ पर साइकिल सवार का साइकिल को मोड़ना– यह एक व्यावहारिक अनुभव की बात है कि जब कोई साइकिल सवार किसी सड़क के वृत्ताकार मोड़ पर अपनी साइकिल मोड़ता है, तो उस समय वह साइकिल सहित मोड़ के केन्द्र की ओर θ कोण से झुक जाता है तथा साइकिल की चाल कम कर लेता है। इसके साथ वह अपनाये गये गति-पथ की त्रिज्या (r) को बढ़ा लेता है। ऐसा न करने से मोड़ पर साइकिल के उलटने तथा बाहर की ओर को फिसलने का खतरा हो जाता है।

इस स्थिति में सूत्र है–

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

साइकिल सवार बिना गिरे मोड़ को पार कर सके, इसके लिए आवश्यक है कि θ का मान न्यूनतम हो।

सूत्र से स्पष्ट है कि θ के न्यूनतम मान के लिए v का मान कम तथा r का मान अधिक होना चाहिए। अ

साइकिल सवार अपने आपको मुड़ने की दिशा में झुकाकर साइकिल का वेग कम कर लेता है और ऐसे पथ पर चलता है जिसकी वक्रता त्रिज्या अधिक हो।

हम जानते हैं कि घर्षण बल का अधिकतम मान $\mu_s R$ होता है।

(R = पृथ्वी की अभिलम्ब प्रतिक्रिया $= mg$ जहाँ m = सवार सहित साइकिल का कुल द्रव्यमान)

$$F = \mu_s mg$$

चूँकि अभिकेन्द्र बल (mv^2/r) घर्षण बल से ही प्राप्त होता है; अत: सड़क तथा साइकिल के पहियों के बीच घर्षण बल इतना अवश्य हो कि वह वृत्ताकार मोड़ पर मुड़ने के लिए आवश्यक अभिकेन्द्र बल प्रदान कर सके। अत: साइकिल के बाहर की ओर बिना फिसले (skidding) मोड़ को पार करने के लिए आवश्यक है कि घर्षण बल का अधिकतम मान ($\mu_s R = \mu_s mg$) आवश्यक अभिकेन्द्र बल के बराबर अथवा उससे अधिक हो।

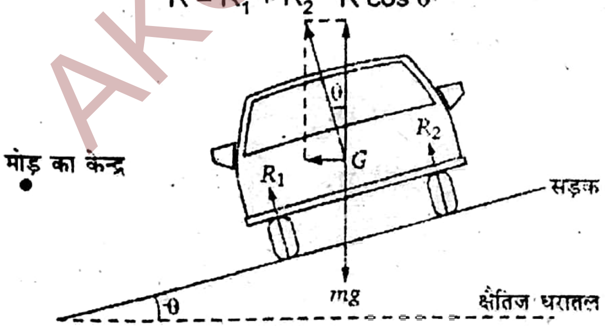
घर्षण बल का अधिकतम मान आवश्यक अभिकेन्द्र बल से कम होने की दशा में साइकिल बाहर की ओर को फिसल जायेगी। यही कारण है कि गीली सड़क पर सड़क तथा पहियों के बीच घर्षण कम हो जाने के कारण यह आवश्यक अभिकेन्द्र बल प्रदान नहीं कर पाता है तथा साइकिल मोड़ पर बाहर की ओर फिसल जाती है।

अत: बिना फिसले मोड़ को पार करने की शर्त है कि

$\mu_s mg \geq \dfrac{mv^2}{r}$ तथा r त्रिज्या के मोड़ पर साइकिल की अधिकतम चाल यदि v_{max} हो, तो

$$mv_{max}^2/r = \mu_s mg \text{ से}$$

$$v_{max} = \sqrt{\mu_s rg} \quad ...(3)$$



चित्र–23

प्रश्न 39. अपकेन्द्रिय के सिद्धान्त का स्पष्ट वर्णन कीजिये।

उत्तर– अपकेन्द्रीय का सिद्धान्त– यह अपकेन्द्रीय क्रिया पर आधारित होता है। वास्तव में अपकेन्द्रीय बल कहीं भी कार्य नहीं करता है।

किसी द्रव को बर्तन में घुमाया जाता है तो द्रव के अन्दर उपस्थित बड़े आकार व द्रव्यमानों के कणों पर अभिकेन्द्रीय बल छोटे द्रव्यमान के कणों की तुलना में अधिक होता है। कणों पर आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल द्रव की विभिन्न परतों के बीच आन्तरिक घर्षण या श्यानता के कारण उत्पन्न होता है क्योंकि घूमता द्रव स्वयं एक बर्तन में है। अत: उसके कण अपकेन्द्रीय बल तथा भारी कण अधिक अपकेन्द्रीय बल अनुभव करते हैं। जिससे हल्के कण केन्द्रीय भाग में (घूर्णन अक्ष के निकट) तथा भारी कण अधिक त्रिज्या के भाग में हो जाते हैं।

माना कि द्रव के भारी तथा हल्के कणों के द्रव्यमान M व m तथा उनकी केन्द्र से दूरियां क्रमश: R व r है।

तब भारी कणों पर अभिकेन्द्रीय बल $= \dfrac{MV^2}{R}$

इसी प्रकार हल्के कणों पर अभिकेन्द्रीय बल $= \dfrac{mV^2}{R}$

क्योंकि दोनों ही कणों पर एक समान बल लगता है। अत:

$$\frac{M v^2}{R} = \frac{m v^2}{r} \quad \text{या} \quad \frac{M}{R} = \frac{m}{r}$$

$$\frac{M}{m} = \frac{R}{r} \quad ...(i)$$

यदि इन कणों को गोलाकार तथा समान व्यास का परन्तु भिन्न-भिन्न घनत्व का मान लें तो:

$$M = \left(\frac{4}{3}\right)\pi a^3 \times D \text{ तथा } m = \left(\frac{4}{3}\right)\pi a^3 d$$

$$\frac{\left(\frac{4}{3}\right)\pi a^3 \times D}{\left(\frac{4}{3}\right)\pi a^3 \, d} = \frac{R}{r}$$

$$\text{या} \quad \frac{D}{d} = \frac{R}{r} \quad ...(ii)$$

समीकरण (i) व (ii) से स्पष्ट है कि द्रव में स्थित भारी कण केन्द्र से अधिक दूरी पर तथा हल्के कण केन्द्र से कम दूरी पर स्थित हो जाते हैं। अत: विभिन्न घनत्व वाले कण पृथक हो जाते हैं।

अध्याय

3 कार्य, शक्ति एवं ऊर्जा
Work, Energy and Power

एक शब्दीय उत्तर (ONE WORD ANSWERS)

प्रश्न 1. कार्य का S.I. मात्रक बताइये।
उत्तर– जूल

प्रश्न 2. किलोमीटर घण्टा तथा जूल में सम्बन्ध लिखिए।
उत्तर– $1\ kwh = 3.6 \times 10^6\ J$

प्रश्न 3. शक्ति का S.I. मात्रक लिखिए।
उत्तर– वाट

प्रश्न 4. गतिज ऊर्जा का सूत्र लिखिए।
उत्तर– $E_k = 1/2\ mv^2$ जहाँ m = द्रव्यमान v = वेग

प्रश्न 5. सामर्थ्य या शक्ति (Power) का सूत्र लिखिए।
उत्तर– शक्ति = कार्य/समय

प्रश्न 6. घर्षण गुणांक का सूत्र लिखिए।
उत्तर– $u = \dfrac{\text{सीमान्त घर्षण बल}}{\text{अभिलम्ब प्रतिक्रिया}}$

प्रश्न 7. कौन सा बल घर्षण बल स्वतः समायोजित होता है?
उत्तर– स्थैतिक घर्षण बल

प्रश्न 8. स्थैतिक घर्षर्ण, सीमान्त घर्षण तथा गतिक घर्षण में कौन अधिकतम है?
उत्तर– सीमान्त घर्षण

प्रश्न 9. कौन सा घर्षण बल न्यूनतम होता है?
उत्तर– बेलन घर्षण

प्रश्न 10. क्या हम घर्षणहीन क्षैतिज तल में कूद सकते है?
उत्तर– नहीं, क्योंकि घर्षणहीन तल अभिलम्ब प्रतिक्रिया प्रदान नहीं करता है।

अति लघु उत्तरीय प्रश्न (VERY SHORT QUESTIONS)

प्रश्न 1. कार्य की परिभाषा लिखिए?
उत्तर– **कार्य (Work)**– जब किसी वस्तु पर कोई बल इस प्रकार कार्य करता है कि उसमें गति उत्पन्न हो जाये, अर्थात् बल अपने क्रिया बिन्दु को विस्थापित कर दे तो कहा जाता है कि बल द्वारा कार्य किया गया।

प्रश्न 2. 1 अर्ग को परिभाषित कीजिये?
उत्तर– यदि किसी वस्तु पर 1 डाइन (dyne) का बल कार्य करके उसे अपनी दिशा में 1 सेन्टीमीटर विस्थापित कर दे तो उस बल द्वारा किया गया कार्य 1 अर्ग कहलाता है।

प्रश्न 3. सामर्थ्य को परिभाषित कीजिये।
उत्तर–**सामर्थ्य (Power)**– कार्य करने की समय दर को सामर्थ्य कहते हैं।

प्रश्न 4. ऊर्जा को परिभाषित कीजिये।
उत्तर–**ऊर्जा (Energy)**– किसी वस्तु की कार्य करने की क्षमता (ability) को ऊर्जा कहते हैं।

प्रश्न 5. गतिज ऊर्जा की परिभाषा दीजिये।
उत्तर– **गतिज ऊर्जा**– किसी वस्तु की गति के कारण उसमें संचित ऊर्जा को गतिज ऊर्जा कहते हैं।

प्रश्न 6. स्थितिज ऊर्जा की परिभाषा दीजिये।
उत्तर– **स्थितिज ऊर्जा**– किसी वस्तु की अपनी स्थिति के कारण उसमें जो ऊर्जा होती है, उसे उसकी स्थितिज ऊर्जा कहते हैं।

प्रश्न 7. घर्षण अथवा घर्षण बल से आप क्या समझते हैं?
उत्तर– **घर्षण अथवा घर्षण बल**– वह बल जो सम्पर्क में

स्थित दो पिण्डों के मध्य सापेक्षित गति या सापेक्षिक गति की प्रवृत्ति का विरोध करता है, घर्षण बल कहलाता है।

प्रश्न 8. सीमान्त घर्षण बल को समझाइये।

उत्तर– सीमान्त घर्षण बल– स्थैतिक घर्षण बल का अधिकतम मान, जब कोई वस्तु किसी अन्य वस्तु की सतह पर फिसलने की स्थिति में आ जाती है, सीमान्त घर्षण बल कहलाता है।

प्रश्न 9. घर्षण कोण को परिभाषित कीजिये।

उत्तर– घर्षण कोण– अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल तथा सीमान्त घर्षण बल व अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल के परिणामों के मध्य कोण होता है। जब कोई पिण्ड किसी नत समतल के अनुदिश ठीक नीचे फिसलने की स्थिति में हो तो क्षैतिज सतह के साथ नत समतल द्वारा बनाया गया न्यूनतम कोण विराम कोण होता है।

किसी क्षैतिज तल पर रखी वस्तु जब ठीक चलने की स्थिति में हो, तो पृष्ठ द्वारा आरोपित परिणामी प्रतिक्रिया बल, अभिलम्ब प्रतिक्रिया से जो कोण बनाता है, उसे घर्षण कोण (λ) कहते हैं।

$$N_s = \tan\lambda \Rightarrow \lambda = \tan^{-1}(N_s)$$

प्रश्न 10. आनत तल घर्षण कोण (Angle of repose) को समझाइये।

उत्तर– आनत तल घर्षण कोण– आनत तल का अधिकतम झुकाव (α) जबकि उस पर रखी वस्तु ठीक फिसलने वाली हो, आनत तल घर्षण कोण कहलाता है तथा इसका मान घर्षण कोण के बराबर होता है।

अर्थात् $\alpha = \lambda = \tan^{-1}(N_s)$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न
(LONG ANSWERS QUESTIONS)

प्रश्न 1. कार्य की परिभाषा दीजिये और कार्य का मात्रक भी बताइये।

उत्तर– किसी पिण्ड को निश्चित दूरी तक विस्थापित करने में किया गया कार्य पिण्ड पर लगाये गये बल के समानुपाती होता है।

इसी प्रकार यदि एक पिण्ड पर एक निश्चित बल कार्य कर रहा है, तो उसमें विभिन्न विस्थापन उत्पन्न करने में विभिन्न प्रमाण के कार्य करने पड़ते हैं। अतः समान बल लगाकर किसी पिण्ड को विस्थापित करने में किया गया कार्य विस्थापन के समानुपाती होता है।

यदि एक पिण्ड पर बल F लगाकर बल की दिशा में ~~विस्थापन α हो तो बल द्वारा पिण्ड पर~~ किया गया कार्य

$W \propto F$ तथा $W \propto d$

अतः $W \propto F \times d$ या $W = K \times F \times d$

जहाँ k एक नियतांक है। यदि W, F तथा d के मात्रक इस प्रकार चुनें कि $F = 1$ $d = 1$ होने से $W = 1$ हो जाये तो $k = 1$ तब

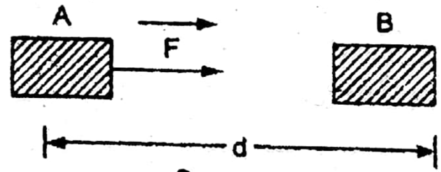
$$\boxed{W = F \times d}$$

अतः बल द्वारा किये गये कार्य का मान बल और बल की दिशा में उत्पन्न विस्थापन के गुणनफल के बराबर होता है।

∴ कार्य = बल × बल की दिशा में विस्थापन

चित्र में कोई वस्तु A स्थिति में है। यदि उस पर F बल लगने पर B स्थिति में आ जाये, तब A से B के बीच की दूरी = वस्तु का विस्थापन = d, अतः बल द्वारा वस्तु पर किया गया कार्य

$$\boxed{W = \vec{F}.\vec{d}}$$



चित्र–1

कार्य का मात्रक– कार्य का मात्रक = बल का मात्रक × विस्थापन का मात्रक,

एम० के० एस० पद्धति में कार्य का मात्रक = न्यूटन × मीटर

परन्तु न्यूटन × मीटर को 'जूल' कहते हैं। अर्थात् 'न्यूटन × मीटर' = 'जूल' (Joule)

अतः 1 जूल = 1 न्यूटन × 1 मीटर

अतः यदि कोई व्यक्ति किसी वस्तु पर 1 न्यूटन का बल लगाकर उस वस्तु को बल की दिशा में 1 मीटर विस्थापित कर दे तो व्यक्ति द्वारा किया गया कार्य 1 जूल होता है। कार्य का CGS मात्रक 'अर्ग' है। कार्य का विमीय सूत्र $[ML^2T^{-2}]$ होता है। कार्य एक 'अदिश' राशि है।

प्रश्न 2. निम्नलिखित को उदाहरण सहित स्पष्ट कीजिये।

1. **शून्य कार्य (zero work)**
2. **धनात्मक कार्य (Positive work)**
3. **ऋणात्मक कार्य (Negative work)**

उत्तर– 1. शून्य कार्य (zero work)– एक वस्तु पर कार्यरत बल द्वारा कार्य नहीं किया जाता जबकि

(*i*) $\theta = 0°$ तो किया गया कार्य

$W = Fs \cos 0° = Fs$

(*ii*) $\theta = 90°$, तो किया गया कार्य

$W = Fs \cos 90° = F \times 0 = 0$

अर्थात् किसी बल द्वारा उसकी दिशा के लम्बवत् विस्थापन में कोई कार्य नहीं होता है।

उदाहरण के लिए– 1. यदि कोई कुली अपने सिर पर ट्रंक रखकर प्लेटफार्म पर इधर-उधर घूमता है तो वह गुरुत्व बल (जो ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर कार्य करता है) के लम्बवत् है।

2. यदि किसी पत्थर को एक डोरी के एक सिरे से बाँधकर वृत्ताकार पथ में घुमायें तो डोरी में तनाव (अभिकेन्द्र बल) द्वारा कृत कार्य शून्य होगा (चूँकि $\theta = 90°$)। शून्य कार्य के लिए या तो $F = 0$ या विस्थापन $s = 0$ या $\vec{F}$ व $\vec{s}$ के बीच कोण $90°$ होना चाहिए।

2. धनात्मक कार्य (Positive work)– यदि बल ($\vec{F}$) तथा विस्थापन ($\vec{s}$) के बीच कोण न्यूनकोण ($0 < \theta < 90°$) हो, तो $\cos\theta$ धनात्मक होगा, अतः कृत कार्य भी धनात्मक होगा।

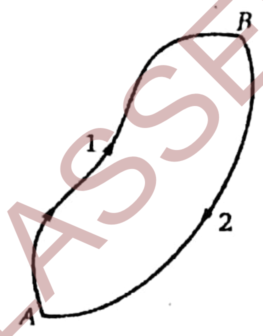
3. ऋणात्मक कार्य (Negative work)– जब विस्थापन बल की दिशा के विपरीत हो– इस दशा में $\theta = 180°$ तथा $\cos\theta = \cos 180° = -1$

अतः $W = Fs \cos 180° = F(-s) = -Fs$

स्पष्ट है कि यदि बल $\vec{F}$ तथा विस्थापन ($\vec{s}$) के बीच कोण अधिककोण ($90° < \theta \le 180°$) हो तो $\cos\theta$ ऋणात्मक होगा, अतः कृत कार्य भी ऋणात्मक होगा। उदाहरण के लिए, यदि किसी वस्तु को खुरदरे पृष्ठ पर विस्थापित करें, तो घर्षण बल गति का विरोध करता है तथा घर्षण बल व विस्थापन के बीच कोण $180°$ होता है। अतः घर्षण बल द्वारा कृत कार्य सदैव ऋणात्मक होता है।

प्रश्न 3. संरक्षी बल (Conservative force) को परिभाषित करते हुए इसके प्रमेय का उल्लेख कीजिये।

उत्तर– परिभाषा–''वह बल जिसके द्वारा किसी वस्तु को एक बिन्दु से किसी दूसरे बिन्दु तक विस्थापित करने में किया गया कार्य, उन बिन्दुओं के बीच के वास्तविक प्रगमन पथ (path of travel) पर निर्भर नहीं करता बल्कि केवल वस्तु की प्रारम्भिक तथा अन्तिम स्थितियों पर निर्भर करता है, संरक्षी बल कहलाता है।''



चित्र 2.

प्रमेय– संरक्षी बल द्वारा सम्पूर्ण चक्रीय पथ में कृत कार्य शून्य होता है। माना कण को बिन्दु A से B तक पथ '1' द्वारा लाया जाता है तथा फिर इसे पुनः B से A तक पथ '2' द्वारा वापस लाया जाता है।

कृत कार्य $W = \oint \vec{F}.d\,\vec{r}$

(जिसमें समाकलन लघु वृत्त चक्रीय पथ को प्रकट करता है।)

$$= \int_{A,\,\text{पथ 1}}^{B} \vec{F}.d\,\vec{r} + \int_{B,\,\text{पथ 2}}^{A} \vec{F}.d\,\vec{r} \quad ....(1)$$

$$= \int_{A,\,\text{पथ 1}}^{B} \vec{F}.d\,\vec{r} - \int_{A,\,\text{पथ 2}}^{B} \vec{F}.d\,\vec{r}$$

चूँकि बल संरक्षी है, अतः कृत कार्य पथ पर निर्भर नहीं करता

$$\therefore \quad \int_{A,\,\text{पथ 1}}^{B} = \int_{A,\,\text{पथ 2}}^{A}$$

इसको ध्यान में रखते हुए, समीकरण (1) से

कृत कार्य, $W = 0$

अर्थात् सम्पूर्ण चक्रीय प्रक्रम में संरक्षी बल द्वारा कृत कार्य शून्य होता है।

प्रश्न 4. असंरक्षी बल (Non-conservative force) को

उदाहरण सहित स्पष्ट करते हुए संरक्षी एवं असंरक्षी बलों की तुलना कीजिये।

उत्तर– असंरक्षी बल (Non-conservative Force)– "यदि किसी वस्तु को एक स्थिति से दूसरी स्थिति तक विस्थापित करने में किसी बल द्वारा अथवा उसके विरुद्ध किया गया कार्य इन दो स्थितियों के बीच अपनाये गये पथ पर निर्भर करता है; असंरक्षी बल कहलाता है।"

उदाहरण–घर्षण बल असंरक्षी बल है।

यदि एक वस्तु को किसी रुक्ष समतल पर एक स्थान A से दूसरे स्थान B तक ले जाया जाता है तो घर्षण बल के विरुद्ध किया गया कार्य A तथा B के बीच पथ की लम्बाई पर निर्भर करेगा, यह केवल A तथा B स्थितियों पर नहीं।

अब आगे यदि वस्तु को उसकी प्रारम्भिक स्थिति A में लाया जाता है तो पुन: घर्षण बल के विरुद्ध कार्य किया जायेगा, चूँकि घर्षण बल सदैव गति का विरोध करता है। इस प्रकार इस बन्द प्रक्रम (चक्रीय प्रक्रम) में घर्षण बल के विरुद्ध किया गया नेट कार्य शून्य नहीं होगा (जो संरक्षी बल का गुण है)।

असंरक्षी बल का दूसरा उदाहरण साइक्लोट्रॉन में उत्पन्न प्रेरण बल है। इसमें इन बलों के अन्तर्गत आवेशित कण अपनी प्रारम्भिक स्थिति में लौटते क्षण प्रारम्भिक ऊर्जा से अधिक गतिज ऊर्जा के साथ लौटता है।

संरक्षी एवं असंरक्षी बलों की तुलना

(*i*) संरक्षी बल द्वारा किया गया कार्य वस्तु की प्रारम्भिक और अन्तिम अवस्था पर ही निर्भर करता है बीच के मार्ग की प्रकृति पर नहीं। असंरक्षी बल में यह वस्तु के वास्तविक मार्ग की लम्बाई पर निर्भर करता है।

(*ii*) संरक्षी बलों द्वारा बन्द परिपथ में एक पूरे चक्र में किया गया कार्य शून्य होता है। असंरक्षी बल के लिए यह सत्य नहीं है। घर्षण बल एक असंरक्षी बल है।

(*iii*) सभी केन्द्रीय बल संरक्षी बल होते हैं। दो वस्तुओं के बीच लगने वाला कोई बल केन्द्रीय बल तब कहलाता है जब वह वस्तुओं को मिलाने वाली रेखा के अनुदिश कार्य करता है।

इस प्रकार दो वस्तुओं के बीच लगने वाला गुरुत्वाकर्षण बल, दो आवेशों के बीच लगने वाला स्थिर-वैद्युत बल तथा दो चुम्बकीय ध्रुवों के बीच लगने वाला चुम्बकीय बल आदि सभी केन्द्रीय बल हैं।

(*iv*) कार्य-ऊर्जा प्रमेय के अनुसार, $W = \Delta KE =$ गतिज ऊर्जा में परिवर्तन, परन्तु एक बन्द पथ में पूर्ण चक्कर लगाने में, संरक्षी बल शून्य कार्य करता है, अत: $W = 0$, तब $\Delta KE = 0$ अर्थात् गतिज ऊर्जा में कोई परिवर्तन नहीं होता।

अत: यदि कोई वस्तु बन्द परिपथ में एक पूरा चक्कर लगाने के बाद अपने स्थान पर गतिज ऊर्जा में कोई परिवर्तन लाये बिना लौट आती है तो उस पर कार्य करने वाला बल संरक्षी बल होता है। असंरक्षी बल के अन्तर्गत वस्तु की गतिज ऊर्जा बदल जाती है। प्रत्यास्थता का बल भी एक संरक्षी बल होता है।

प्रश्न 5. घर्षण से आप क्या समझते हैं? घर्षण के लाभ व हानियाँ लिखिए।

उत्तर– घर्षण (Friction)– (1) जब दो वस्तुएँ एक-दूसरे के सम्पर्क में हों तथा उनके बीच आपेक्षिक गति हो तो उनके बीच एक ऐसा बल उत्पन्न होता है जो उनकी आपेक्षिक गति का विरोध करता है, यही विरोधी (opposing force) घर्षण बल कहलाता है।

घर्षण के लाभ (Advantages of Friction (2016))– घर्षण का सबसे बड़ा गुण तो यह है कि हम पृथ्वी पर घर्षण की कृपा से ही चल पाते हैं। घर्षण की ही बदौलत हम हाथ में रोटी पकड़कर खा सकते हैं। यदि घर्षण न हो तो हम कुछ भी कार्य न कर पायें, चलना तो दूर हम चारपाई पर ठीक तरह से सो भी नहीं पायेंगे। घर्षण के कारण वस्तुएँ फिसलती नहीं है अत: 'पकड़' (grip) अच्छी होती है और हम हाथों से कार्य कर पाते हैं।

2. घर्षण के कारण ही वाहन तेज गति से सड़कों पर दौड़ सकते हैं। यदि वाहन के टायर और सड़क के बीच घर्षण न हो तो वाहन के पहिये एक ही स्थान पर घूमते रहेंगे और टायर आगे नहीं बढ़ेगा, जैसे, कीचड़ में धँसे हुए ट्रक के पहिये एक ही स्थान पर घूमते रहते हैं।

इसी वजह से वाहनों के टायर की सतह उभरी हुई तथा खुरदरी बनायी जाती है जिससे टायर और सड़क के बीच घर्षण बढ़ जाये।

3. घर्षण के कारण ही वाहनों के ब्रेक कार्य करते हैं और वाहन रुक जाता है।

4. घर्षण के बिना न तो दो रस्सियों में गाँठ बाँधी जा सकती है और न लकड़ी या दीवार में कील ठोकी जा सकती है।

5. घर्षण के कारण ही मशीनों में घिरनी और पट्टे (belt) की सहायता से एक स्थान पर लगाया गया बल दूसरे स्थान पर स्थानान्तरित किया जा सकता है।

6. घर्षण के कारण ही माचिस की तिल्ली से आग जला

सकते हैं। इस प्रकार घर्षण के लाभ बहुत ज्यादा है।

घर्षण से हानियाँ– 1. मशीन के जो भाग घूमते हैं (rotating parts), उनका घिसना एवं टूट-फूट घर्षण के कारण ही होता है।

2. मशीन के घूमने वाले भाग घर्षण के कारण बहुत गरम हो जाते हैं जिसमें मशीन को नुकसान पहुँचने की सम्भावना हो जाती है।

3. घर्षण के कारण मशीनों को दी गयी ऊर्जा का एक बहुत बड़ा भाग व्यर्थ चला जाता है उसे किसी भी प्रकार से उपयोगी कार्य के रूप में नहीं बदला जा सकता। इससे मशीनों की दक्षता (efficiency) काफी कम हो जाती है।

इस प्रकार हम देखते हैं कि यद्यपि घर्षण जीवन की एक महत्वपूर्ण आवश्यकता है परन्तु एक दोष भी है। इत: इसे एक आवश्यक बुराई (necessary evil) कहा जाता है।

प्रश्न 6. स्थैतिक तथा गतिक घर्षण की परिभाषा दीजिए। **(2012)**

उत्तर– स्थैतिक घर्षण– जब दो पिण्ड या सतह विरामावस्था में एक-दूसरे के सम्पर्क में हों तो पिण्ड या समूह को सरकने या चलने से रोकने के लिए जो घर्षण बल कार्य करता है, वह स्थैतिक घर्षण कहलाता है।

गतिक घर्षण– जब दो पिण्ड या सतह जो आपस में सम्पर्क में हों तथा एक सतह चलना प्रारम्भ कर दे जबकि दूसरी विरामावस्था में हो तो चलने वाली सतह के द्वारा उत्पन्न बल गतिक घर्षण कहलाता है। गतिक घर्षण का मान सदैव स्थैतिक घर्षण से कम होता है।

प्रश्न 7. सीमान्त घर्षण से आप क्या समझते हैं? सीमान्त घर्षण के नियम बताइये। **(2013, 2016)**

उत्तर– सीमान्त घर्षण (Limiting friction)– किसी मेज पर रखे हुए एक पिण्ड पर बल लगाने से घर्षण बल पिण्ड की गति का विरोध करता है। एक स्थिति में घर्षण बल अधिकतम होता है। यदि प्रयुक्त बल घर्षण के उच्चतम मान से अधिक हो जाता है तब पिण्ड गति करना प्रारम्भ कर देता है। घर्षण बल का यह अधिकतम मान जो पिण्ड की गति प्रारम्भ होने के क्षण के समय कार्य करता है सीमान्त घर्षण कहलाता है। यह बल प्रतिक्रिया बल के समानुपाती ($F \propto R$) होता है।

सीमान्त घर्षण के नियम (Rules of Limiting Friction)–

1. इसका मान सम्पर्क में रखे पृष्ठों की प्रकृति तथा उनके खुदरेपन अथवा चिकनेपन पर निर्भर करता है। यह पृष्ठों के आकार व उनकी आकृति जैसे क्षेत्रफल पर निर्भर नहीं करता है।

2. दिए गए पृष्ठों के लिए घर्षण बल-सम्पर्क पृष्ठों के स्पर्श रेखीय अथवा समान्तर होता है तथा घर्षण बल उस दिशा से विपरीत दिशा में उत्पन्न होता है जिस दिशा में कोई वस्तु गति करने के लिए प्रेरित होती है।

3. सीमान्त घर्षण बल fs अभिलम्ब प्रतिक्रिया R के अनुक्रमानुपाती होता है। अर्थात् $fs \propto R$ या $fs = \mu_s R$ जहां μ_s अनुक्रमानुपाती नियतांक है। इसे स्थैतिक घर्षण गुणांक कहते हैं। यह नियम तभी लागू होगा जबकि f_s का मान अधिकतम हो।

प्रश्न 8. निम्नलिखित पर टिप्पणी कीजिये–

***(i)* घर्षण गुणांक**

***(ii)* घर्षण कोण**

उत्तर– *(i)* घर्षण गुणांक (Coefficient of friction)– सीमान्त स्थैतिक घर्षण बल का सूत्र है–

$$(f_s)_{max} = \mu_s R$$

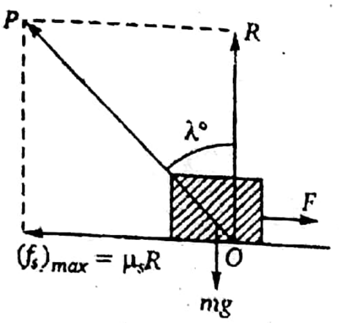
$$\text{स्थैतिक घर्षण गुणांक, } \mu_s = \frac{(f_s)_{max}}{R}$$

$$\text{अर्थात्} \quad \mu_s = \frac{\text{सीमान्त घर्षण बल}}{\text{अभिलम्ब प्रतिक्रिया}}$$

चूँकि यह दो राशियों का अनुपात है, अत: न तो इसका कोई मात्रक (unit) होता है और न कोई विमा।

इस प्रकार μ_s दो सतहों के खुरदरेपन की माप है। पूर्णत: चिकनी सतहों के लिए $\mu_s = 0$ (यद्यपि यह एक आदर्श स्थिति है, व्यवहार में किसी सतह का μ_s शून्य नहीं हो सकता) तथा पूर्णत: खुरदरी सतह के लिए $\mu_s = 1$ (यह भी आदर्श स्थिति है)। अत: व्यवहारत: μ_s का मान 0 से अधिक और 1 से कम होता है। इसके अपवाद (exception) बहुत कम हैं।

***(ii)* घर्षण कोण (Angle of friction)–** सीमान्त घर्षण की अवस्था में सीमान्त घर्षण बल $(f_s)_{max}$ तथा अभिलम्ब प्रतिक्रिया R का परिणामी P, अभिलम्ब प्रतिक्रिया R के साथ जो कोण बनाता है उसे घर्षण कोण कहते हैं। इसको सामान्यत: λ से प्रदर्शित करते हैं। (चित्र)।



चित्र 3.

इस चित्र से, $\tan\lambda = \dfrac{(f_s)_{\max}}{R}$

परन्तु $(f_s)_{\max} = \mu_s . R$

$\therefore \quad \tan\lambda = \dfrac{\mu_s . R}{R}$

अथवा $\tan\lambda = \mu_s$ या $\lambda = \tan^{-1}(\mu_s)$

अतः स्थैतिक घर्षण गुणांक, घर्षण कोण का स्पर्शज्या (tangent) के बराबर होता है।

चूँकि μ_s का मान 1 से कम होता है अतः λ का मान सदैव 45° से कम होता है। इसी प्रकार खुरदरे पदार्थों का μ_s चिकने पदार्थों की तुलना में अधिक होता है, इसलिए खुरदरे पदार्थों के लिए घर्षण कोण λ अधिक होता है, चिकने पदार्थों के लिए कम।

प्रश्न 9. रूक्ष क्षैतिज समतल पर रखी वस्तु पर किस प्रकार बल लगाया जा सकता है? संक्षेप में लिखिए।

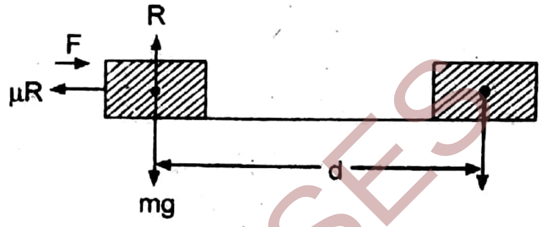
उत्तर- रूक्ष क्षैतिज समतल पर रखी वस्तु पर निम्नलिखित दो प्रकार से बल लगाया जा सकता है–

(*i*) समतल के समान्तर

(*ii*) समतल से θ कोंण बनाते

उपरोक्त दोनों स्थितियों में कार्य का मान भिन्न-भिन्न होता है जिसकी गणना निम्न रूप से करते हैं।

(*i*) यदि बल समतल के समान्तर लगाया जाए– माना m द्रव्यमान का एक पिण्ड एक रुक्ष क्षैतिज समतल पर रखा हुआ है। पिण्ड पर क्षैतिज के समान्तर बल F लगाकर उसे स्थिर चाल से d दूरी तक विस्थापित किया जाता है। पिण्ड का भार mg ऊर्ध्वाधर दिशा में नीचे की ओर कार्यरत है जो तल को mg न्यूटन के बल से नीचे को दबाता है। तल की प्रतिक्रिया R इस बल (mg न्यूटन) के बराबर परंतु विपरीत दिशा में है। पिण्ड को बल F द्वारा क्षैतिज दिशा में आगे की ओर धक्का दिया जाता है। अतः पिण्ड इस बल F की विपरीत दिशा में घर्षण बल $\mu_k N$ का अनुभव करता है। यदि पिण्ड स्थिर चाल से गतिमान है तब पिण्ड पर क्षैतिज दिशा में परिणामी बल शून्य होगा।



चित्र 4.

$\therefore F - \mu_k mg = 0$

यहाँ μ_k पिण्ड तथा समतल के बीच गतिज घर्षण गुणांक है।

तथा $R = mg$

$\therefore \quad F = \mu_k mg$

अतः पिण्ड के विस्थापन में किया गया कार्य

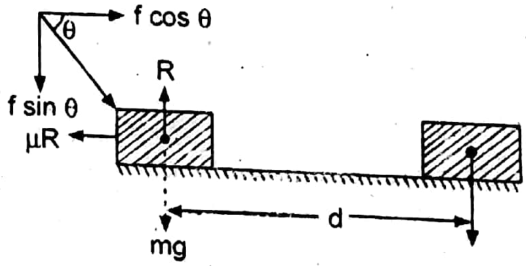
$$W = F \times \Delta S$$
$$= \mu_k mg \times \Delta S$$

या $W = \mu_k$ m.g.d. [$\because$ विस्थापन $\Delta S = d$]

(*ii*) यदि बल क्षैतिज से कोण बनाते हुए लगाया जाए– माना m द्रव्यमान के एक पिण्ड को चित्र के अनुसार क्षैतिज से θ कोण बनाती हुई दिशा में बल लगाकर d दूरी तक विस्थापित किया गया है। बल F का ऊर्ध्वाधर घटक $F\sin\theta$ तथा क्षैतिज घटक $F\cos\theta$ है। बल का क्षैतिज घटक $F\cos\theta$ पिण्ड को आगे बढ़ाता है तथा ऊर्ध्वाधर घटक $F\sin\theta$ नीचे की ओर कार्यरत है। पिण्ड पर समतल की अभिलम्ब प्रतिक्रिया

$$R = mg + F\sin\theta$$

तथा घर्षण बल $\mu_k R = w_k(mg + F\sin\theta)$



चित्र–5

क्योंकि पिण्ड स्थिर वेग से गति करता है अतः क्षैतिज दिशा में कार्यरत बल $F\cos\theta$, घर्षण बल $\mu_k(mg + F\sin\theta)$ के बराबर होगा।

$\therefore \quad F\cos\theta = \mu_k(mg + F\sin\theta)$

$$F\cos\theta - \mu_k F\sin\theta = \mu_k mg$$

$$F\cos\theta\left[1-\mu_k\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right] = \mu_k mg$$

$$F\cos\theta\,[-\mu_k\tan\theta] = \mu\, k_{mg}$$

$$F\cos\theta = \frac{\mu_k mg}{1-\mu_k\tan\theta}$$

अत: बल $F\cos\theta$ द्वारा पिण्ड को विस्थापित करने में किया गया कार्य

$$w = F\cos\theta \times \Delta S$$

या
$$w = \left(\frac{\mu_k mg}{1-\mu_k\tan\theta}\right)d$$

प्रश्न 10. रूक्ष नत समतल पर गति को समझाइए।

उत्तर– माना एक रुक्ष नत समतल AB का क्षैतिज से झुकाव तब तक बढ़ाया जाता है जब तक तल पर रखा गया पिण्ड नीचे न फिसलने लगे। यदि θ वह कोण है जिस पर पिण्ड नीचे फिसलने लगता है तब पिण्ड पर निम्न बल कार्य करते हैं-

(*i*) पिण्ड का भार mg ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर।

(*ii*) सीमान्त घर्षण बल F, समतल पर ऊपर की ओर, यह बल पिण्ड के भार mg के तल के समान्तर घटक $mg \sin\theta$ के बराबर है।

अर्थात्

$$F = mg\sin\theta \qquad ...(i)$$

(*iii*) तल पर अभिलम्बवत् प्रतिक्रिया बल R ऊपर की ओर यह बल बिन्दु के भार mg के तल के लम्बवत् घटक mg cos θ के बराबर है। अर्थात्

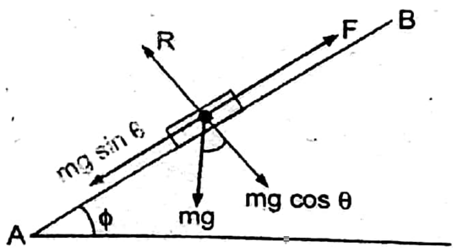
$$R = mg\sin\theta \qquad ...(ii)$$

समीकरण (*i*) तथा (*ii*) से

$$\frac{F}{R} = \frac{mg\sin\theta}{mg\cos\theta} = \tan\theta$$

परन्तु
$$\frac{F}{R} = \mu$$

अत:
$$\tan\theta = \mu$$



चित्र–6

अत: एक नत समतल पर रखे गये पिण्ड के नीचे की ओर फिसलने के लिए तल के क्षैतिज से झुकाव θ का न्यूनतम मान होता है

$$\theta = \tan^{-1}\mu$$

यहाँ μ पिण्ड व नत समतल के मध्य घर्षण गुणांक है।

प्रश्न 11. ऊर्जा से आप क्या समझते हैं? गतिज ऊर्जा एवं स्थितिज ऊर्जा को परिभाषित कीजिए।

उत्तर– ऊर्जा (Energy)– "किसी वस्तु के कार्य करने की क्षमता को उसकी ऊर्जा (energy) कहते हैं।"

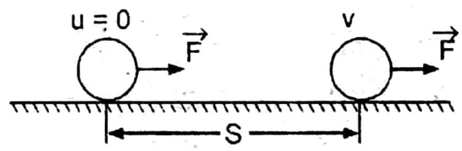
यह एक अदिश राशि है। इसका मात्रक जूल तथा विमा $[ML^2T^{-2}]$ है।

ऊर्जा के विभिन्न रूप हैं। यान्त्रिक ऊर्जा, उष्मीय ऊर्जा, विद्युत ऊर्जा, ध्वनि ऊर्जा, प्रकाश ऊर्जा, रासायनिक ऊर्जा आदि।

यान्त्रिक ऊर्जा दो प्रकार की होती हैं–

1. गतिज ऊर्जा (Kinetic Energy)– किसी गतिमान वस्तु में उसकी गति विशेष के कारण जो ऊर्जा संचित रहती है उसे गतिज ऊर्जा कहते हैं।

माना विरामावस्था में रखी m द्रव्यमान की वस्तु पर बल F लगाकर उसे त्वरित किया जाता है। इस अवस्था में न्यूटन के गति के द्वितीय नियम से



चित्र–7

$$a = \frac{F}{m}$$

चूंकि वस्तु का प्रारम्भिक वेग शून्य है (U = 0)

s दूरी तय करने के बाद वस्तु का वेग v हो जाता है।

अत: समीकरण $v^2 = u^2 + 2as$ से

$$v^2 = 0 + 2as$$

इस समीकरण में $a = 2\frac{F}{m}s$ रखने पर

$$v^2 = 2\cdot\frac{F}{m}s$$

$$F \times S = \frac{1}{2}mv^2$$

परन्तु वस्तु द्वारा किया गया कार्य = गतिज ऊर्जा

$= F \times s$

अत: $\boxed{\text{गतिज ऊर्जा} = \frac{1}{2}mv^2}$

2. स्थितिज ऊर्जा (Potential Energy)– किसी वस्तु में उसकी स्थिति या विकृति विशेष के कारण उत्पन्न ऊर्जा स्थितिज ऊर्जा कहलाती है। स्थितिज ऊर्जा को U से प्रदर्शित करते हैं।

माना किसी वस्तु पर F बल लगाकर कार्य हो रहा है तथा इसके विपरीत वस्तु का विस्थापन x है। तब वस्तु में संचित स्थितिज ऊर्जा

$$\boxed{U = F \times x}$$

प्रश्न 12 कार्य ऊर्जा प्रमेय का कथन देते हुए इसका निगमन कीजिये।

उत्तर– कार्य ऊर्जा प्रमेय (Work energy theorem)– "जब किसी बाह्य बल द्वारा किसी वस्तु पर कुछ कार्य किया जाता है तो वस्तु की गतिज ऊर्जा में इस कार्य के बराबर वृद्धि हो जाती है। इसके विपरीत यदि कोई वस्तु किसी अवरोधी बल के विरुद्ध कुछ कार्य करती है तो उसकी गतिज ऊर्जा में इस कार्य के बराबर कमी हो जाती है।"

अत: कार्य-ऊर्जा प्रमेय के अनुसार, "कार्य तथा गतिज ऊर्जा एक-दूसरे के समतुल्य हैं तथा गतिज ऊर्जा में परिवर्तन किए गये कार्य के बराबर होता है।"

उपपत्ति (Proof)– जब वस्तु पर अचर (constant) बल लगा हो– माना एक अचर या नियत बल $\vec{F}$ m द्रव्यमान की वस्तु पर कार्य करता है। यदि इस बल के कारण, बल की दिशा में, विस्थापन $\vec{s}$ हों तो किया गया कार्य–

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = Fs$$

यदि बल द्वारा वस्तु में त्वरण a उत्पन्न होता है, तो F = ma (न्यूटन के गति विषयक द्वितीय नियम से)

$$\therefore \quad W = (ma)s = m(as) \quad \ldots(1)$$

वस्तु के प्रारम्भिक और अन्तिम वेगों के परिणाम क्रमश: u तथा v हैं तो–

गति की तृतीय समीकरण $v^2 = u^2 + 2as$ से,

$$as = \frac{v^2 - u^2}{2}$$

यह मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$W = m\left[\frac{v^2 - u^2}{2}\right]$$

अथवा $W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2$

अथवा $\boxed{W = K_f - K_i}$

(जहाँ K_i तथा K_f क्रमश: प्रारम्भिक व अन्तिम गतिज ऊर्जाएं हैं।)

अथवा $W = \Delta K$

अर्थात् कार्य = गतिज ऊर्जा में परिवर्तन

अत: किसी नियत बल द्वारा किसी वस्तु पर किया गया कार्य उसकी गतिज ऊर्जा में परिवर्तन के बराबर होता है।

(यही कार्य-ऊर्जा प्रमेय का कथन है।)

यही कार्य-ऊर्जा प्रमेय है।

प्रश्न 13 यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण सिद्धान्त को समझाते हुए नियम को निगमित कीजिये।

उत्तर– यांत्रिक ऊर्जा के संरक्षण का नियम है- यदि बल संरक्षी है, तो कण की यांत्रिक ऊर्जा नियत रहती है। अर्थात्

कुल ऊर्जा = गतिज ऊर्जा + स्थितिज ऊर्जा = नियत

संकेतों में $E = K + U =$ नियत

व्युत्पत्ति– माना m द्रव्यमान का एक कण संरक्षी बलों के अन्तर्गत स्थिति x_1 से x_2 तक विस्थापित किया जाता है। इसके फलस्वरूप इसका वेग v_1 से v_2 हो जाता है। कार्य-ऊर्जा प्रमेय से

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_{ext}\,dx = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$= K_2 - K_1 \quad \ldots(1)$$

यदि स्थितियों x_1 व x_2 पर कण की स्थितिज ऊर्जायें क्रमश: U_1 व U_2 हों, तो

कार्य $\quad W = \int_{x_1}^{x_2} F_{ext}\,dx$

$$= \int_{x_1}^{x_2}\left(-\frac{dU}{dx}\right)dx = -[U]_{x_1}^{x_2}$$

$$= -[U(x_2) - U(x_1)] = -(U_2 - U_1)$$

$= U_1 - U_2$ ...(2)

समीकरणों (1) व (2) से

$K_2 - K_1 = U_1 - U_2$

या $K_1 + U_1 = K_2 + U_2$

अर्थात् $K + U =$ नियतांक

प्रश्न 14. मुक्त रूप से गिरते पिण्ड की यांत्रिक ऊर्जा के संरक्षण का उदाहरण स्वरूप उल्लेख कीजिए।

उत्तर– मुक्त रूप से गिरते पिण्ड की यांत्रिक ऊर्जा के संरक्षण का उदाहरण– गिरते पिण्ड की यांत्रिक ऊर्जा (अर्थात् गतिज ऊर्जा + स्थितिज ऊर्जा) नियत रहती है। इसे गणना द्वारा निम्न प्रकार दर्शाया जा सकता है–

माना m द्रव्यमान की कोई वस्तु पृथ्वी तल से h ऊँचाई पर स्थित बिन्दु A से गिरती है। प्रारम्भ में बिन्दु A पर गतिज ऊर्जा शून्य है केवल स्थितिज ऊर्जा है।

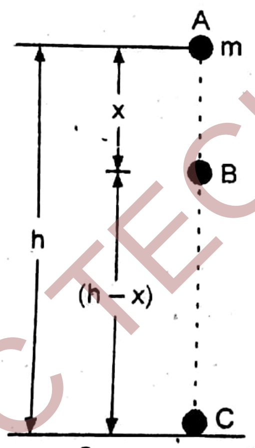
∴ A बिन्दु पर वस्तु में कुल ऊर्जा = गतिज ऊर्जा + स्थितिज ऊर्जा

$= 0 + mgh = mgh$ ...(1)

माना गिरते समय किसी क्षण वस्तु बिन्दु B पर हो, जो अपनी प्रारम्भिक स्थिति से x दूरी तक गिर चुकी है। यदि बिन्दु B पर वस्तु का वेग v हो, तो सूत्र

$v^2 = u^2 + 2as$

$v^2 = 0 + 2gx = 2gx$



चित्र–8

∴ बिन्दु B पर वस्तु की गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}mv^2$

$= \frac{1}{2}m \times 2gx = mgx$

बिन्दु B पर वस्तु की स्थितिज ऊर्जा

$= mg(h - x)$

∴ बिन्दु B पर वस्तु की कुल ऊर्जा = गतिज ऊर्जा + स्थितिज ऊर्जा

$= mgx + mg(h - x) = mgh$ ...(2)

अब माना वस्तु पृथ्वी तल पर स्थित बिन्दु C के ठीक ऊपर है तथा पृथ्वी से वस्तु ठीक टकराने वाली ही है। अब उसकी स्थितिज ऊर्जा शून्य है। वस्तु द्वारा गिरी ऊँचाई $= h$

सूत्र $v^2 = u^2 + 2as$ से C पर वस्तु का वेग ($a = g$ तथा $s = h$),

$v'^2 = 0 + 2\,gh = 2\,gh$

C पर वस्तु की गतिज ऊर्जा

$= \frac{1}{2}m(v')^2 = \frac{1}{2}m \times 2gh = mgh$

C पर वस्तु की कुल ऊर्जा = गतिज ऊर्जा + स्थितिज ऊर्जा

$= mgh + 0 = mgh$ ...(3)

इस प्रकार हम देखते हैं कि गिरती वस्तु के प्रत्येक बिन्दु पर गतिज ऊर्जा तथा स्थितिज ऊर्जा का योग नियत बना रहता है। अतः गुरुत्वीय बल के अन्तर्गत वस्तु की कुल यांत्रिक ऊर्जा नियत रहती है।

प्रश्न 15. ऊर्जा रूपान्तरण के कुछ उदाहरणों का उल्लेख कीजिए।

उत्तर– ऊर्जा रूपान्तरण के कुछ उदाहरण– (*i*) बाँधों में संचित जल की स्थितिज ऊर्जा, टरबाइन की गतिज ऊर्जा में बदलती है जो अन्ततः जनरेटर द्वारा विद्युत ऊर्जा में बदल दी जाती है।

(*ii*) विद्युत बल्ब में विद्युत ऊर्जा, प्रकाश और ऊष्मा की ऊर्जा में बदल जाती है।

(*iii*) प्रकाश-विद्युत सेल में प्रकाश ऊर्जा विद्युत ऊर्जा में बदल जाती है।

(*iv*) विद्युत मोटर विद्युत ऊर्जा को यांत्रिक ऊर्जा में और हीटर उसे ऊष्मीय ऊर्जा में बदलता है।

(*v*) घड़ी में चाबी भरने में खर्च हुई यांत्रिक ऊर्जा स्प्रिंग की स्थितिज ऊर्जा में बदल जाती है फिर वह धीरे-धीरे घड़ी की सुइयों को गतिज ऊर्जा प्रदान करती रहती है।

प्रश्न 16. शक्ति से आप क्या समझते हैं? इसका मात्रक लिखिए।

उत्तर– शक्ति (Power)– एकांक समय में किसी मशीन अथवा व्यक्ति द्वारा किया गया कार्य शक्ति कहलाता है। अर्थात् कार्य करने की दर को शक्ति कहते हैं। यदि कोई व्यक्ति t सेकण्ड में W कार्य करता है तब उसके द्वारा एकांक समय में किया कार्य (अथवा शक्ति)।

$$P = \frac{\text{कार्य}}{\text{समय}} \text{ या } P = \frac{W}{t}$$

शक्ति का मात्रक = जूल/सेकण्ड होता है, इसे वाट भी कहते हैं।

∴ 1 जूल/सेकण्ड = 1 वॉट

शक्ति का अन्य मात्रक अश्व शक्ति भी होता है।

1 अश्व शक्ति = 746 वॉट

प्रश्न 17. एक लड़का 80 किग्रा के द्रव्यमान सहित 2 सेकण्ड में 1 मीटर ऊँची सीढ़ियाँ चढ़ जाता है। उसकी शक्ति की गणना कीजिये।

उत्तर–यहाँ $m = 40$ किग्रा, $h = 1$ मी, $t = 2$ से, $g = 9.8$ मी/से^{2}

∴ किया गया कार्य, $W = mgh$

$= 40 \times 9.8 \times 1 = 784$ जूल

∴ शक्ति $= \frac{W}{t} = \frac{784 \text{ जूल}}{2 \text{ से}}$

$= 392$ जूल से$^{-1}$ = **392 वाट**

प्रश्न 18. एक मशीन की शक्ति 2 किलोवाट है। इसके द्वारा 10 मिनट में किये गये कार्य की गणना कीजिये।

उत्तर– शक्ति, $P = 2$ किलोवाट $= 2000$ वाट

समय, $t =$ 10 मिनट = 10 × 60 सेकण्ड = 600 सेकण्ड

चूँकि सामर्थ्य $= \frac{\text{कार्य}}{\text{समय}}$

कार्य = सामर्थ्य × समय

= (2000 वाट) × (600 सेकण्ड)

$= 12 \times 10^5$ जूल = **1.2×10^6 जूल**

प्रश्न 19. एक पिण्ड पर 20 न्यूटन का बल लगाने पर वह बल की दिशा से 30° का कोण बनाते हुए 5 मीटर विस्थापित होता है। बल द्वारा कृत कार्य की गणना कीजिये।

उत्तर– बल द्वारा कृत कार्य

$$W = \vec{F} \cdot \vec{S} = F\,S\cos\theta$$

यहाँ $F = 20$ न्यूटन, $S = 5$ मीटर, $\theta = 30°$

∴ $W = 20 \times 5 \times \cos 30°$

$= 100 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}$

$= 50 \times 1.732 = 86.6$ जूल

प्रश्न 20. 4 किग्रा का एक पिण्ड 30 मीटर/ सेकण्ड की चाल से ऊर्ध्वाधरतः फेंका जाता है। $g = 10$ मीटर/ सेकण्ड^2 मानकर गणना कीजिए-

(i) पिण्ड की प्रारम्भिक गतिज ऊर्जा

(ii) महत्तम ऊँचाई प्राप्त करने पर पिण्ड की स्थितिज ऊर्जा

उत्तर– (i) प्रश्नानुसार, द्रव्यमान, $m = 4$ किग्रा, पिण्ड का वेग, $v = 30$ मी/से

∴ प्रारम्भिक गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}mv^2$

$= \frac{1}{2} \times 4 \times (30)^2 = 1800$ जूल

(ii) महत्तम ऊँचाई प्राप्त होने पर पिण्ड की कुल ऊर्जा स्थितिज ऊर्जा में बदल जाती है, अतः उस स्थान पर पिण्ड की स्थितिज ऊर्जा = **1800** जूल

प्रश्न 21. 72 किमी प्रति घण्टा की चाल से क्षैतिज सड़क पर चलने वाली कोई कार 180 न्यूटन बल का सामना कर रही है। उसके इंजन की शक्ति ज्ञात कीजिए।

उत्तर–दिया है, $v = 72$ किमी/घण्टा

$= \frac{72 \times 1000}{60 \times 60} = 20$ मी – से$^{-1}$

बल $F = 180$ न्यूटन

शक्ति $P = ?$

$P = F \times v = 180 \times 20 = 3600$ वाट

= **3.6 किलोवाट**

प्रश्न 22. एक पम्प-मोटर की शक्ति 2 किलोवाट है। यह प्रति मिनट कितना पानी अपने से 10 मीटर की ऊँचाई तक उठा सकती है? ($g = 10$ मी/से^{2})

उत्तर– दिया है, $P = 2kW = 2 \times 10^3$ वाट = 2000 जूल/सेकण्ड, $h = 10$ मीटर, $g = 10$ मी–से$^{-2}$, $t = 1$ मिनट = 60 सेकण्ड, द्रव्यमान $M = ?$

$W = M = ?$

$W = Mgh,\ P = \frac{W}{t}$

$$P = \frac{Mgh}{t}$$

$$\therefore M = \frac{P \times t}{g \times h}$$

या $$M = \frac{2000 \times 60}{10 \times 10} = \textbf{1200 किग्रा}$$

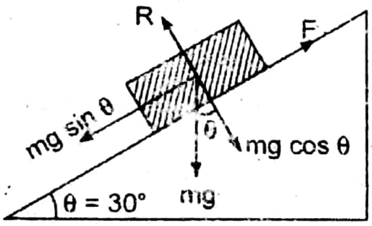
प्रश्न 23. 50 ग्राम द्रव्यमान का धातु का एक बक्सा 15° कोण वाले नत तल पर रखा है और बिना किसी त्वरण के नीचे की ओर फिसलता है। जब कोण 15° से बढ़ा दिया जाये तो त्वरण ज्ञात कीजिये।

उत्तर– $m = 50$ ग्राम $= 5 \times 10^{-2}$ किग्रा०

फिसलन कोण, $\alpha = 15°$

अब $N = \tan\alpha = \tan 15° = 0.2679$

अब नत तल का कोण $\theta = 15 + 15 = 30°$



चित्र–9

माना a = बॉक्स का नीचे की दिशा में लगा त्वरण तथा, नीचे की दिशा में बॉक्स पर कार्यरत परिणामी बल

$$F_1 = mg\sin\theta - F$$

परन्तु $$F = NR = Nmg\cos\theta$$

$$\therefore F_1' = mg\sin\theta - Nmg\cos\theta$$

$$\therefore \quad a = \frac{F_1}{m} g\sin\theta - Ng\cos\theta$$

$$= g(\sin\theta - N\cos\theta)$$

$$= 9.8\,(0.5000 - 0.2679 \times 0.866)$$

$$= 9.8\,(0.5000 - 0.2320)$$

$$= 9.8 \times 0.268 = \textbf{2.62 मी/से}^2$$

प्रश्न 24. 3. किग्रा द्रव्यमान का एक गुटका फर्श पर रखा है। स्थैतिक घर्षण गुणांक का मान 0.4 है। चित्रानुसार गुटके पर 3.0 न्यूटन का बल F लगाया जाता है। गुटके एवं फर्श के बीच लगने वाले घर्षण बल की गणना कीजिए। ($g = 10$ मी/से^{2})

उत्तर– गुटके का द्रव्यमान m = 3.0 किग्रा तथा स्थैतिक घर्षण गुणांक $\mu_s = 0.4$.

फर्श की गुटके पर अभिलम्ब प्रतिक्रिया $R = mg$

$\therefore$ $R = 3.0 \times 10 = 30$ न्यूटन

सीमान्त स्थैतिक घर्षण बल

$f_s = \mu_s R = 0.4 \times 30$ न्यूटन $= 12$ न्यूटन

गुटके पर आरोपित बल $F = 3.0$ न्यूटन जो f_s से कम है।
अतः इस दशा में गुटके में गति नहीं होगी

चित्र–10

तथा फर्श व गुटके के बीच घर्षण बल (समायोजन बल) आरोपित बल के बराबर, अर्थात् 3.0 न्यूटन होगा।

प्रश्न 25. एक ट्रक की क्षैतिज सतह पर 1 किग्रा द्रव्यमान का ब्लॉक पड़ा है। सतह तथा ब्लॉक के मध्य स्थैतिक घर्षण गुणांक का मान 0.6 है। यदि ट्रक का त्वरण 5 मी/से^{2} है तो ब्लॉक पर कार्यरत घर्षण बल ज्ञात कीजिए।

उत्तर– सीमान्त घर्षण बल

$F = NR = N\,mg \quad R = mg$

$= 0.6 \times 1 \times 9.8 = 5.88$ न्यूटन

आरोपित बल $F = ma = 1 \times 5 = 5$ न्यूटन

आरोपित बल सीमान्त घर्षण बल से कम है। अतः घर्षण बल आरोपित बल के बराबर होगा।

इसलिए घर्षण बल = **5 न्यूटन**

प्रश्न 26. एक वस्तु धरातल पर 1 मी/से के वेग से लुढ़कती है तथा 5 मीटर दूरी तय करने के पश्चात् रुक जाती है। घर्षण गुणांक की गणना कीजिए। ($g = 10$ मी/से^{2})

उत्तर– $u = 1$ मी/से; $v = 0$; $s = 5$ मी

समीकरण $v^2 - u^2 = 2as$ का प्रयोग करने पर,

$$a = \frac{v^2 - u^2}{2s} = \frac{0-1}{2 \times 5} = -\frac{1}{10} \text{ मी/से}^2$$

$\therefore$ घर्षण बल $F = ma = m \times \dfrac{1}{10} = \dfrac{m}{10}$ न्यूटन

अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल

$R = mg = m \times 10 = 10m$ न्यूटन

$\therefore$ घर्षण गुणांक, $N = \dfrac{F}{R}$

$$= \frac{m}{10} \times \frac{1}{10m} = \frac{1}{100} = 0.01$$

अध्याय 4

घूर्णन गति
Rotational Motion

एक शब्दीय उत्तर (ONE WORD ANSWERS)

प्रश्न 1. बल आघूर्ण का मात्रक लिखिए।

उत्तर– न्यूटन-मीटर

प्रश्न 2. जड़त्व आघूर्ण का मात्रक M.K.S तथा CGS दो पद्धतियों में लिखिए।

उत्तर– किग्रा-मी०^2, ग्राम-सेमी^{2}

प्रश्न 3. किसी वस्तु का जड़त्व आघूर्ण किस बिन्दु कण के लिए शून्य होता है?

उत्तर– घूर्णन अक्ष पर स्थित बिन्दु कण के लिए।

प्रश्न 4. घूर्णन त्रिज्या का मात्रक M.K.S में लिखिए।

उत्तर– मीटर

प्रश्न 5. पिण्ड के कोणीय संवेग (J) तथा जड़त्व आघूर्ण (I) में सम्बन्ध लिखिए।

उत्तर– $J = I w$ जहां w = कोणीय वेग

प्रश्न 6. कोणीय संवेग का मात्रक लिखिए।

उत्तर– किग्रा – मी^{2} – सेकण्ड$^{-1}$

प्रश्न 7. वृत्ताकार चकती का उसके परितः जड़त्व आघूर्ण सूत्र लिखिए।

उत्तर– $I = 1/4\ MR^2$

प्रश्न 8. घूर्णन गतिज ऊर्जा तथा कोणीय संवेग में क्या सम्बन्ध है?

उत्तर– $K_{rot} = J^2/2I$

प्रश्न 9. एक ठोस गोले का द्रव्यमान M तथा त्रिज्या R है। इसके व्यास के परितः जड़त्व आघूर्ण का सूत्र लिखिए। यदि इसी द्रव्यमान तथा त्रिज्या का खोखला गोला हो तब सूत्र क्या होगा?

उत्तर– $I = \frac{2}{5}MR^2$

प्रश्न 10. किसी वलय (द्रव्यमान M व त्रिज्या R) का जड़त्व आघूर्ण उसके व्यास के परितः क्या होता है?

उत्तर– $\frac{1}{2}MR^2$

अति लघु उत्तरीय प्रश्न (VERY SHORT QUESTIONS)

प्रश्न 1. जड़त्व आघूर्ण को परिभाषित कीजिए। (2011)

उत्तर– जड़त्व आघूर्ण (Moment of inertia)– घूर्णन अक्ष के परितः पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण $I = \Sigma mr^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots$, जिसमें $m_1, m_2, m_3, \ldots$ पिण्ड के कणों के द्रव्यमान एवं $r_1, r_2, r_3, \ldots$ उनकी घूर्णन अक्ष से दूरियाँ है। बल आघूर्ण का कार्य घूर्णन गति में अवस्था परिवर्तन करना है जबकि जड़त्व आघूर्ण का कार्य घूर्णन गति में अवस्था परिवर्तन का विरोध करना है। घूर्णन गति में जड़त्व आघूर्ण का वही कार्य है जो कि रेखीय गति में द्रव्यमान का।

प्रश्न 2. कोणीय संवेग से आप क्या समझते हैं? (2016)

उत्तर–कोणीय संवेग– किसी कण का कोणीय संवेग घूर्णन अक्ष के परितः रेखीय संवेग का आघूर्ण है। पिण्ड का कोणीय संवेग, पिण्ड के समस्त कणों के कोणीय संवेगों का वेक्टर योग है।

यदि पिण्ड का घूर्णन अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण I हो तथा कोणीय संवेग J हो तो, $J = I\omega$ जिसमें ω पिण्ड का कोणीय वेग है।

प्रश्न 3. कोणीय संवेग संरक्षण का नियम समझाइये।

उत्तर– कोणीय संवेग संरक्षण का नियम– पिण्ड पर कार्य करने वाला बल आघूर्ण कोणीय संवेग परिवर्तन की दर के बराबर होता है।

अर्थात् $\tau = \dfrac{\Delta J}{\Delta t}$

यदि पिण्ड पर कार्य करने वाला बल आघूर्ण शून्य हो, तो पिण्ड का कोणीय संवेग $J = I\omega$ नियत रहता है

(*i*) घूर्णन गति में बल आघूर्ण द्वारा कृत कार्य
$W = \tau\theta$

(*ii*) बल की शक्ति $P = \tau\omega$

प्रश्न 4. घूर्णन त्रिज्या को परिभाषित कीजिये। (2011)

उत्तर–घूर्णन त्रिज्या– घूर्णन त्रिज्या घूर्णन अक्ष से वह दूरी होती है जिस पर पिण्ड के समस्त द्रव्यमान को केन्द्रित मानने पर पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण उतना ही हो जितना पिण्ड के वास्तविक द्रव्यमान वितरण के कारण होता है। इसे 'K' से प्रदर्शित किया जाता है। K के पदों में जड़त्व आघूर्ण को निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है–

$$I = MK^2$$

प्रश्न 5. जड़त्व तथा जड़त्व आघूर्ण में क्या अन्तर है।

उत्तर– जड़त्व किसी पिण्ड को रेखीय गति में परिवर्तन का विरोध करने का गुण है जबकि जड़त्व आघूर्ण किसी पिण्ड की घूर्णन गति में परिवर्तन के विरोध का गुण होता है। इन दोनों में मुख्य अन्तर यह है कि जड़त्व केवल पिण्ड के द्रव्यमान पर निर्भर करता है, परन्तु पिण्ड का किसी घूर्णन अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण पिण्ड के द्रव्यमान के साथ-साथ इस बात पर भी निर्भर करता है कि यह द्रव्यमान उस अक्ष के चारों ओर किस प्रकार वितरित है।

प्रश्न 6. घूर्णन कर रही दो वस्तुओं A तथा B के कोणीय संवेग बराबर हैं तथा A का जड़त्व आघूर्ण B के जड़त्व आघूर्ण की अपेक्षा अधिक है $(I_A > I_B)$। किस वस्तु की घूर्णन गतिज ऊर्जा अधिक होगी?

उत्तर–सूत्र $K_{rot} = \dfrac{J^2}{2I}$ से स्पष्ट है कि J के नियत मान के लिए $K_{rot} \propto \dfrac{1}{I}$ अर्थात् कम जड़त्व आघूर्ण वाली वस्तु की घूर्णन गतिज ऊर्जा अधिक होगी अर्थात् B की घूर्णन गतिज ऊर्जा A की घूर्णन गतिज ऊर्जा से अधिक होगी।

प्रश्न 7. दो घूर्णन करते हुए पिण्डों A तथा B के कोणीय संवेग बराबर हैं। A का जड़त्व आघूर्ण B के जड़त्व आघूर्ण का दो गुना है। A तथा B की घूर्णन गतिज ऊर्जाओं का अनुपात ज्ञात कीजिए।

उत्तर– $K_{rot} = \dfrac{J^2}{2I}$

$$\Rightarrow \frac{(K_{rot})_A}{(K_{rot})_B} = \frac{I_B}{I_A} \quad (\because J \text{ दोनों के लिए समान है})$$

$$= \frac{I_B}{2I_B}$$

$$\Rightarrow (K_{rot})_A : (K_{rot})_B = 1:2$$

प्रश्न 8. समान्तर अक्ष प्रमेय का कथन स्पष्ट कीजिये।

उत्तर– किसी पिण्ड का किसी अक्ष AB के परितः जड़त्व आघूर्ण I उस पिण्ड के द्रव्यमान केन्द्र C में से जाने वाली समान्तर अक्ष EF के परितः जड़त्व आघूर्ण (I_{cm}) तथा पिण्ड के द्रव्यमान M व दोनों के बीच की लम्ब दूरी a के गुणनफल के योग के बराबर होता है।

प्रश्न 9. हेलीकॉप्टर में दो नोदक ही क्यों लगाते है।

उत्तर– सन्तुलन बनाये रखने के लिए, क्योंकि यदि इसमें एक नोदक हो तो इसके घूमने पर कोणीय संवेग संरक्षण के कारण हेलीकॉप्टर स्वयं नोदक की विपरीत दिशा में घूमेगा।

प्रश्न 10. एक व्यक्ति घूमते स्टूल पर भुजा फैलाकर बैठा है। यदि वह अचानक अपनी भुजायें नीचे गिरा लेता है तो उसके कोणीय वेग, जड़त्व आघूर्ण तथा कोणीय संवेग में क्या परिवर्तन होंगे।

उत्तर– कोणीय संवेग संरक्षित रहेगा, जड़त्व आघूर्ण घट जायेगा तथा कोणीय संवेग बढ़ जायेगा।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न
(LONG ANSWER QUESTIONS)

प्रश्न 1. स्थानान्तरीय गति एवं घूर्णन गति की संकल्पना उदाहरण की सहायता से समझाइये ।

उत्तर–स्थानान्तरीय गति (Translatory motion)– किसी पिण्ड की सरल रेखीय गति को स्थानान्तरीय गति कहते हैं। इस गति में पिण्ड के सभी कण समान चाल से, समान्तर सीधी रेखाओं में गमन करते हैं तथा इनका आपेक्षिक विस्थापन नियत रहता है। इस गति में पिण्ड पर कोई बल लगाने पर इसके समस्त कण बराबर दूरी से विस्थापित होते हैं। स्पष्ट है

कि पिण्ड में उत्पन्न विस्थापन पिण्ड के किसी भी कण में उत्पन्न विस्थापन से जाना जा सकता है। बन्दूक से निकली गोली की गति, कार की गति, बर्फ पर स्कैटिंग करती लड़की की गति स्थानान्तरीय गति के उदाहरण हैं। पटरी के सापेक्ष रेलगाड़ी के डिब्बे की गति भी स्थानान्तरीय गति ही है।

घूर्णन गति (Rotary motion)– घूर्णन गति में पिण्ड अपने ही स्थान पर, अपने भीतर से गुजरती हुई एक निश्चित अक्ष के चारों ओर घूमता है। पिण्ड जिस अक्ष के चारों ओर घूमता है, उसे घूर्णन अक्ष (axis of rotation) कहते हैं। जो कण घूर्णन अक्ष पर स्थित होते हैं वे स्थिर रहते हैं। अतः घूर्णन गति में उनकी गति पर विचार नहीं किया जाता। घूर्णन गति में पिण्ड के अन्य विभिन्न कण भिन्न-भिन्न त्रिज्याओं के संकेन्द्रीय वृत्ताकार पथों पर घूमते हैं जिनका केन्द्र घूर्णन अक्ष पर ही होता है। लट्टू का घूमना, बिजली के पंखों के घूमते हुए ब्लेडों की गति आदि घूर्णन गति के उदाहरण हैं। पटरियों पर दौड़ती रेलगाड़ी के पहियों की गति उसी धुरी (axle) के चारों ओर घूर्णन गति ही होती है।

प्रश्न 2. बल आघूर्ण को उदाहरण की सहायता से स्पष्ट कीजिए।

उत्तर– बल आघूर्ण (Torque or Moment of force)– यदि कोई दृढ़ पिण्ड किसी बिन्दु या किसी रेखा के अनुदिश स्थिर है तो इसमें केवल घूर्णन गति उत्पन्न की जा सकती है। जिस प्रकार स्थानान्तरीय गति में वस्तु की गति अवस्था में परिवर्तन लाने (उसमें रेखीय त्वरण उत्पन्न करने) के लिए बल की आवश्यकता होती है, ठीक उसी प्रकार घूर्णी गति में परिवर्तन लाने के लिए अर्थात् उसमें कोणीय त्वरण उत्पन्न करने के लिए एक भौतिक राशि की आवश्यकता होती है। इसी को बल आघूर्ण कहते हैं।

"इस प्रकार घूर्णन गति में बल के समतुल्य राशि बल आघूर्ण है।"

उदाहरणार्थ– दरवाजा एक दृढ़ पिण्ड है जो इसके कब्जों से होकर गुजरने वाली स्थिर अक्ष के परितः घूमने के लिए स्वतन्त्र है। अब दरवाजे को घुमाने के लिए बल की आवश्यकता होगी, परन्तु किसी भी बल द्वारा यह कार्य नहीं किया जा सकता। जैसे, कब्जों से गुजरने वाली ऊर्ध्वाधर अक्ष पर लगाया गया बल दरवाजे में कोई घूर्णन उत्पन्न नहीं कर सकता। किन्तु जब किसी नियत परिणाम का बल दरवाजे के बाहरी किनारे पर लम्बवत् लगाया जाता है तो यह दरवाजे को घुमाने में अधिक प्रभावी सिद्ध होता है। अतः घूर्णन गति में केवल बल का परिणाम ही नहीं बल्कि यह कहाँ और कैसे लगाया गया है, यह भी महत्वपूर्ण है।

प्रश्न 3. बल आघूर्ण के व्यावहारिक उदाहरण समझाइये।

उत्तर– बल आघूर्ण के व्यावहारिक उदाहरण –

(*i*) दरवाजा खोलना– दरवाजा खोलने या बन्द करने के लिए हम बीच में बल लगाने की अपेक्षा, किनारे पर बल लगाना अधिक उचित समझते हैं। क्योंकि दरवाजे की घूर्णन अक्ष से बल के क्रिया-बिन्दु की दूरी किनारे पर अधिकतम (तब d का मान अधिकतम होता है) होती है। अतः कम बल (F) लगाकर बल आघूर्ण (τ) का मान अधिक किया जा सकता है और दरवाजा सरलता से खुल जाता है।

एक बात का ध्यान रखा जाता है कि दरवाजा खोलने के लिए लगाया गया बल यदि अधिकतम दूरी पर तो हो परन्तु वह दरवाजे के समान्तर हो तो भी दरवाजा नहीं खुलता परन्तु यदि बल को दरवाजे के लम्बवत् लगाया जाता है तो वह आसानी से खुल जाता है। अतः हम देखते हैं कि दरवाजे को खोलने के लिए बल आघूर्ण (τ) को अधिकतम बनाया जाता है। इसलिए दरवाजों पर हत्थे कब्जों से दूर लगाये जाते हैं।

(*ii*) घरों में आटा पीसने की चक्की में हत्था, कीली से बहुत दूर (परिधि के पास) लगाया जाता है जिससे कम बल लगाने से ही चक्की आसानी से चल सके। यदि हत्थे को कीली के पास ही लगा दिया जाये तो चक्की को चलाना उतना आसान नहीं रहेगा।

(*iii*) कुम्हार के चाक में डण्डे से घुमाने के लिए गड्ढा परिधि के पास (अर्थात् कीली से दूर) बनाया जाता है जिससे बल की उत्तोलक भुजा (d) का मान बढ़ जाता है, अतः बल आघूर्ण बढ़ जाता है और थोड़ा बल लगाने पर भी चाक आसानी से घूम जाता है।

(*iv*) पानी निकालने के लिए हैण्डपम्पे में अधिक लम्बा हत्था लगाया जाता है जिससे उत्तोलक भुजा का मान बढ़ जाता है और कम ताकत लगाकर ही पानी निकाला जा सकता है।

(*v*) पेंचकस का हत्था चौड़ा बनाया जाता है जिससे बल की क्रिया-रेखा की लम्बवत् दूरी बढ़ जाती है तथा बल आघूर्ण का मान बढ़ जाता है और पेंच को आसानी से खोला जा सकता है।

(*vi*) वोल्ट से कसे हुए नट को खोलने के लिए पाने की सहायता से घूर्णन अक्ष से अधिकतम दूरी पर बल लगाया जाता है, अतः बल आघूर्ण का मान बढ़ जाता है और नट को आसानी से खोला जा सकता है। इसलिए ट्रकों के पहियों में

लगे बोल्ट को खोलने के लिए लम्बी छड़ का प्रयोग किया जाता है।

(*vii*) इसी प्रकार ऑयल इंजन के भारी पहिये [गतिपालक चक (Fly wheel)], सीलिंग फैन या साइकिल के पहिये को घुमाने के लिए घूर्णन अक्ष से अधिकतम दूरी अर्थात् उसकी रिम पर बल लगाने से वह आसानी से घूम जाता है।

प्रश्न 4. कोणीय संवेग को परिभाषित कीजिये?

उत्तर–कोणीय संवेग (Angular momentum)– किसी कण के रेखीय संवेग का किसी घूर्णन अक्ष के परित: आघूर्ण उस अक्ष के परित: कोणीय संवेग कहलाता है।

इसकी माप बिन्दु कण के रेखीय संवेग तथा घूर्णन अक्ष से बल की क्रिया रेखा की लम्ब दूरी के गुणनफल द्वारा की जाती है। इसे $\vec{J}$ द्वारा व्यक्त किया जाता है। अत: सूत्र रूप में,

कोणीय संवेग $(\vec{J})$ = रेखीय संवेग $(\vec{P})$ X अक्ष के कण की लम्बवत दूरी।

कोणीय संवेग एक सदिश राशि है। जिसकी दिशा दक्षिणावर्त पेंच नियम द्वारा निर्धारित की जाती है।

प्रश्न 5. कोणीय संवेग संरक्षण के नियम का कथन देते हुए विस्तार में वर्णन कीजिये।

उत्तर– कोणीय संवेग संरक्षण का नियम (Law of conservation of Angular momentum)–

कथन– यदि किसी घूर्णन अक्ष के परित: घूमते हुए पिण्ड पर कोई बाह्य बल-आघूर्ण न लग रहा हो, तो उस पिण्ड का कोणीय संवेग सदैव नियत रहता है, अर्थात् समय के साथ नहीं बदलता।

जब किसी निकाय (system) पर कोई बाहरी बल आघूर्ण क्रियाशील नहीं होता तो उसे विलगित निकाय (isolated system) कहते हैं। अत: इस नियम को इस प्रकार भी व्यक्त किया जा सकता है– **विलगित निकाय का कुल कोणीय संवेग (net angular momentum) नियत रहता है।**

अब चूँकि $J = I\omega$

अत: कोणीय संवेग संरक्षण के नियमानुसार,

$J = I\omega$ = नियतांक

अत: यदि जड़त्व आघूर्ण I बढ़ता है तो कोणीय वेग ω घटेगा और यदि I घटता है तो ω बढ़ेगा। यदि किसी निकाय का जड़त्व आघूर्ण I_1 होने पर उसका संगत कोणीय वेग ω_1 तथा जड़त्व आघूर्ण I_2 होने पर संगत कोणीय वेग ω_2 है, तो इस नियम के अनुसार,

$$I_1 \times \omega_1 = I_2 \times \omega_2$$

उपपत्ति (Proof)– जब कोई पिण्ड किसी बाह्य बल-आघूर्ण τ के अन्तर्गत किसी घूर्णन अक्ष के परित: घूर्णन गति करता है, तो पिण्ड के कोणीय संवेग परिवर्तन की दर बल-आघूर्ण के बराबर होती है।

अत: $$\frac{dJ}{dt} = \tau$$

यदि पिण्ड पर कोई बाह्य बल-आघूर्ण कार्य न करे, तो

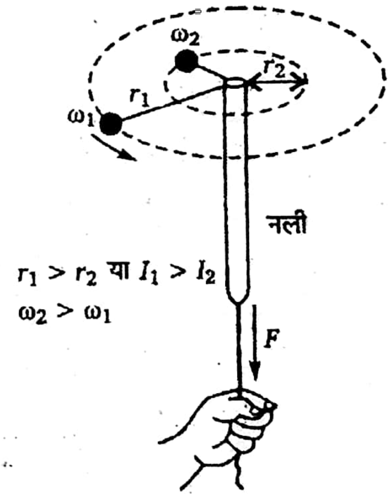
$\tau = 0$, अर्थात् $\dfrac{dJ}{dt} = 0$

अत: J = नियतांक

यही कोणीय संवेग संरक्षण का नियम है।

प्रश्न 6. कोणीय संवेग संरक्षण पर आधारित कुछ व्यावहारिक उदाहरणों की विवेचना कीजिये।

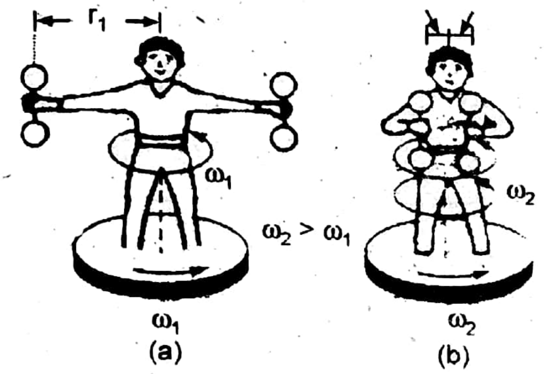
उत्तर–उदाहरण (1)– चित्र–1 में एक धागे के सिरे पर गेंद बाँधकर तथा इसका दूसरा सिरा एक ऊर्ध्व नली में से गुजारकर हाथ में पकड़कर गेंद को तेजी से क्षैतिज वृत्त में घूमते हुए दिखाया गया है। यदि हम धागे को नीचे खींचकर



चित्र-1

गेंद के वृत्तीय पथ की त्रिज्या कम कर दें तो हम देखेंगे कि गेंद पहले की अपेक्षा अधिक तेजी से घूमती है। इसका कारण यह है कि वृत्तीय पथ की त्रिज्या कम हो जाने से गेंद का घूर्णन अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण भी कम हो जाता है फलत: कोणीय वेग बढ़ जाता है।

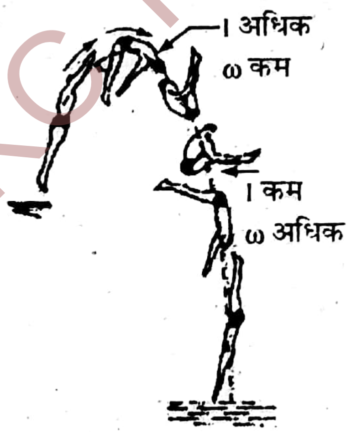
उदाहरण (2)– चित्र– 2 (*a*) में एक व्यक्ति एक घूमने वाले मंच पर अपने हाथों में एक-एक धातु के डम्बल लिये हुए हाथ फैलाकर खड़ा हुआ दिखाया गया है। मंच के घूमते रहने पर यदि व्यक्ति अपने हाथों को चित्र-(2) (*b*) की भाँति सिकोड़ लेता है तो मंच की घूर्णन गति (कोणीय वेग) तेज हो जाती है। इसका कारण यह है कि भुजाओं को समेट लेने पर डम्बलों की घूर्णन अक्ष से दूरी r घट जाती है जिससे व्यक्ति के जड़त्व आघूर्ण का मान कम हो जाता है।



चित्र-2

अत: कोणीय संवेग संरक्षण के नियम ($J = I\omega$ = नियतांक) से जड़त्व आघूर्ण I के कम होने से घूर्णन का कोणीय वेग ω बढ़ जाता है। अत: मंच की गति तेज हो जाती है। भुजाओं को पुन: फैला देने पर मंच की गति पुन: धीमी हो जाती है। इसी प्रकार बर्फ पर स्केटिंग करने वाले व्यक्ति अपनी भुजाओं को समेटकर व फैलाकर स्केटिंग की गति बदलते हैं।

इसी प्रकार बर्फ पर स्केटिंग करने वाले स्कैटर्स (skaters) ,बैले डांसर आदि एक टाँग पर खड़े होकर (जड़त्व आघूर्ण कम करके) तेजी से घूमते हैं। इन सभी क्रियाओं में कोणीय संवेग-संरक्षण के नियम का प्रयोग होता है।

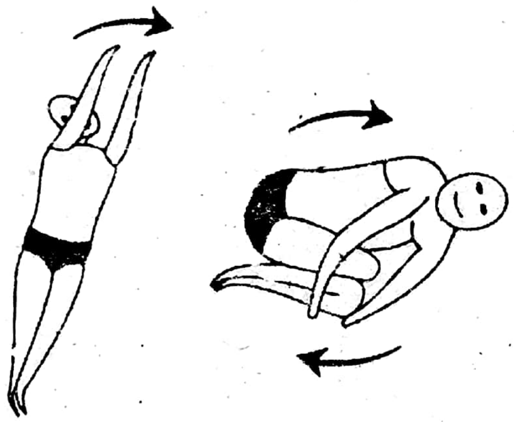


चित्र-3

उदाहरण (3)– जब कोई तैराक जल में कूदता है, तो वह सीधे कूदने की बजाय अपने शरीर को मोड़ लेता है। शरीर को मोड़ लेने से (चित्र-3) उसका जड़त्व आघूर्ण कम हो जाता है (क्योंकि शरीर का द्रव्यमान-केन्द्र घूर्णन अक्ष के और पास आ जाता है) और कोणीय संवेग संरक्षण नियम के अनुसार उसका कोणीय वेग बढ़ जाता है, जिससे वह आसानी से हवा में कलैया (loop) ले लेता है। जल में गिरने से ठीक पहले वह अपने शरीर को पुन: सीधा करके जड़त्व आघूर्ण बढ़ा लेता है जिससे उसकी घूर्णन गति कम हो जाती है।

इसी प्रकार वायु में कलैया लेने वाला व्यक्ति (नट कलाकार) अपनी शरीर को चित्र- 4 की भाँति सिकोड़ लेता है। इसका कारण यह है कि शरीर को सिकोड़ लेने से व्यक्ति का घूर्णन अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण कम हो जाता है, अत: कोणीय संवेग संरक्षण के नियम के अनुसार उसका कोणीय वेग बढ़ जाता है, जिससे कलैया लगाने में आसानी हो जाती है तथा वह जमीन पर वापस आने से पहले अधिक कलैया ले पाता है।

ऐसा ही कार्य सर्कस में कलाकर एक झूले पर कूदते समय करता है।



चित्र-4

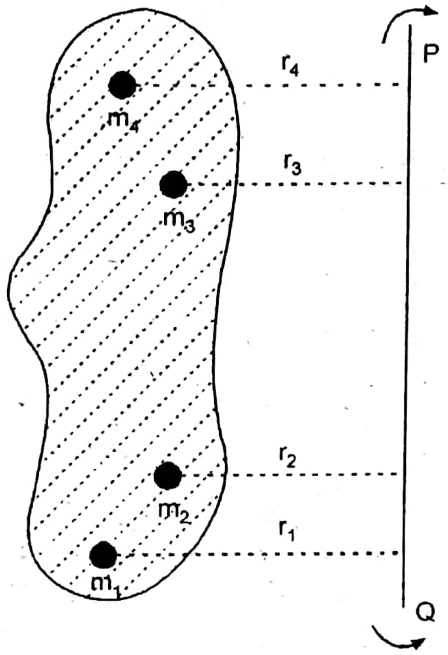
इसी प्रकार बिल्ली ऊँचाई से गिरने पर अपने पंजों पर टिक जाती है, इस कार्य में पूँछ जड़त्व आघूर्ण को कम या अधिक करने में काम आती है।

प्रश्न 7. जड़त्व आघूर्ण से आप क्या समझते हैं? इसका मात्रक तथा विमीय सूत्र बताइये।

उत्तर– जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia)– जब कोई पिण्ड किसी अक्ष के परित: गति कर रहा हो तो वह अक्ष के परित: किये जाने वाले घूर्णन में उत्पन्न परिवर्तन का विरोध करता है। पिण्ड का यह गुण **'जड़त्व आघूर्ण' कहलाता है।**

''किसी पिण्ड के किसी भी कण का घूर्णन अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण, कण के द्रव्यमान तथा उसकी घूर्णन अक्ष से दूरी के गुणनफल के बराबर होता है।''

$I = mr^2$



चित्र–5

माना m द्रव्यमान का एक बड़ा पिण्ड छोटे-छोटे कई कणों से मिलकर निर्मित हुआ है। इन छोटे कणों के द्रव्यमान m_1, m_2, m_3 .... हैं तथा इनकी घूर्णन अक्ष से दूरियां क्रमशः r_1, r_2, r_3.... हैं।

इस स्थिति में कणों के जड़त्व आघूर्ण क्रमशः $m_1 r_1^2$, $m_2 r_2^2$, $m_3 r_3^2$ ... होंगे।

पूरे पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण 'I' सभी कणों के जड़त्व आघूर्ण के योग के बराबर होता है।

अतः $\quad I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + ...$

या $\quad I = \Sigma mr^2$

"इस प्रकार दृढ़ पिण्ड का किसी घूर्णन अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण, पिण्ड के सभी कणों के द्रव्यमानों तथा उनकी घूर्णन अक्ष से लम्बवत् दूरियों के वर्गों के गुणनफल के योग के बराबर होता है।"

इसका मात्रक किग्रा – मीटर^2 है तथा विमा $[ML^2]$ है।

प्रश्न 8. परिभ्रमण त्रिज्या (radius of gyration) को परिभाषित कीजिये।

उत्तर–परिभ्रमण त्रिज्या– प्रत्येक पिण्ड अनेक छोटे-छोटे कणों से मिलकर बना होता है जो कि घूर्णन अक्ष से अलग-अलग दूरी पर स्थित होते हैं। सम्पूर्ण पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण इन सभी कणों के जड़त्व आघूर्णों के योग के बराबर होता है अर्थात् $I = \Sigma\, mr^2$

इस सूत्र से जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करने के लिए पिण्ड के सभी कणों के द्रव्यमान तथा उनकी घूर्णन अक्ष से दूरियाँ ज्ञात होनी चाहिए।

यदि यह मान लिया जाये कि पिण्ड का सम्पूर्ण द्रव्यमान $M = \Sigma m$ किसी एक ऐसे निश्चित बिन्दु पर केन्द्रित है जिस पर रखे Σm द्रव्यमान के द्रव्य-कण को घूर्णन अक्ष के परितः घुमाने पर उतना ही जड़त्व आघूर्ण प्राप्त होता है जितना कि इस पिण्ड का अक्ष के परितः वास्तव में है। तब इस बिन्दु की घूर्णन अक्ष से लम्बवत् दूरी को घूर्णन त्रिज्या कहते हैं तथा इसे K से प्रदर्शित करते है। घूर्णन त्रिज्या का मात्रक दूरी का मात्रक होता है।

पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण $I = M \times K^2$ ... (1)

जहाँ K पिण्ड की घूर्णन अक्ष के सापेक्ष घूर्णन त्रिज्या है।

" अतः किसी पिण्ड की किसी घूर्णन अक्ष के परितः घूर्णन त्रिज्या, घूर्णन अक्ष से वह लम्बवत् दूरी है जिसके वर्ग की पिण्ड के कुल द्रव्यमान से गुणा करने पर उस पिण्ड का दी गयी घूर्णन अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण प्राप्त हो जाता है।"

उपर्युक्त समीकरण (1) से

$$K^2 = \frac{I}{M} \quad \text{अथवा} \quad K = \sqrt{\left(\frac{I}{M}\right)}$$

"अतः **किसी घूर्णन अक्ष के परितः किसी पिण्ड की घूर्णन त्रिज्या उसी अक्ष के परितः पिण्ड के जड़त्व आघूर्ण तथा पिण्ड के कुल द्रव्यमान के अनुपात के वर्गमूल के बराबर होती है।**"

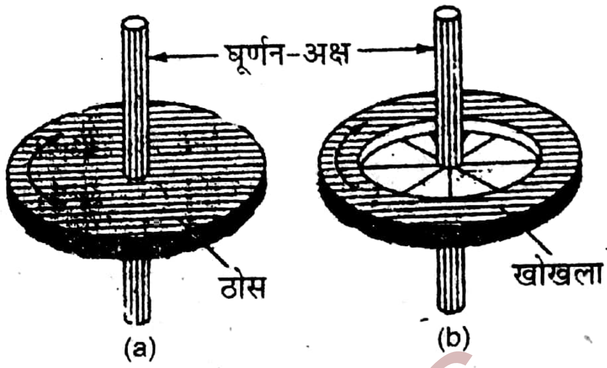
प्रश्न 9. जड़त्व आघूर्ण के भौतिक महत्व की उदाहरण सहित व्याख्या कीजिये।

उत्तर– जड़त्व आघूर्ण का भौतिक महत्व (Physical significance of moment of inertia)– हम जानते हैं कि यदि कोई पिण्ड विरामावस्था में है अथवा एकसमान चाल से सरल रेखा में चल रहा है तो उसकी इस अवस्था में परिवर्तन करने के लिए उस पर बाह्य बल आरोपित करना पड़ता है। पिण्ड के इस गुण को जड़त्व कहते हैं। किसी पिण्ड का द्रव्यमान जितना अधिक होता है, उसकी विरामावस्था अथवा रेखीय वेग में वही परिवर्तन करने के लिए उतने ही अधिक बल की आवश्यकता होती है। **इस प्रकार किसी पिण्ड का द्रव्यमान ही उसके जड़त्व की माप है।**

इसी प्रकार, यदि कोई पिण्ड विरामावस्था में है अथवा एकसमान कोणीय वेग से घूर्णन गति कर रहा है तो उसकी इस अवस्था में परिवर्तन करने के लिए अर्थात् किसी पिण्ड को किसी घूर्णन अक्ष के परितः घुमाने अथवा घूमते हुए पिण्ड के कोणीय वेग में परिवर्तन करने के लिए उस पर एक बल-आघूर्ण लगाना पड़ता है। किसी पिण्ड का किसी घूर्णन अक्ष के परितः 'जड़त्व आघूर्ण' जितना अधिक होता है, उस पिण्ड को उसके अक्ष के परितः घुमाने के लिए अथवा उसकी घूर्णन अवस्था में परिवर्तन लाने के लिए उस पर उतना ही बल-आघूर्ण लगाना पड़ता है। अतः यदि कोई वस्तु किसी अक्ष के चारों ओर घूम रही है तो वह अपनी घूर्णन गति में किसी भी प्रकार के परिवर्तन का विरोध करती है। इसे **घूर्णन जड़त्व** (rotational inertia) कहते हैं। किसी दिये गये अक्ष के परितः इस घूर्णन जड़त्व को वस्तु के जड़त्व आघूर्ण द्वारा मापा जाता है। अतः जिस प्रकार स्थानान्तरित गति का जड़त्व द्रव्यमान से मापा जाता है, उसी प्रकार घूर्णन गति का जड़त्व, जड़त्व आघूर्ण से मापा जाता है। इस प्रकार घूर्णन गति में किसी पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण वही कार्य करता है जो रेखीय गति में पिण्ड का जड़त्व करता है।

किसी पिण्ड के जड़त्व तथा जड़त्व आघूर्ण में एक अन्तर भी है। पिण्ड का जड़त्व केवल उसके द्रव्यमान पर निर्भर करता है, परन्तु पिण्ड का किसी घूर्णन अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण द्रव्यमान के साथ-साथ इस बात पर भी निर्भर करता है कि यह द्रव्यमान घूर्णन अक्ष के चारों ओर किस प्रकार वितरित है।

उदाहरणार्थ, चित्र– 6 में दो पहिये (a) तथा (b) दिखाये गये हैं, जिन्हें उनके केन्द्र से गुजरने वाली ऊर्ध्वाधर घूर्णन अक्ष के परितः घुमाया जाता है। दोनों पहियों के द्रव्यमान परस्पर बराबर हैं। चित्र–6 (*a*) वाला पहिया एकसमान मोटाई का है तथा चित्र– 6 (*b*) वाला पहिया बीच में खाली है तथा स्पोक की सहायता से रोका गया है। स्पष्ट है दूसरे पहिये में पहले पहिये की अपेक्षा द्रव्यमान का अधिक भाग अक्ष से दूर है। पहियों को घुमाने पर ज्ञात होता है, कि दूसरे पहिये को घुमाने में, पहले पहिये की अपेक्षा अधिक बल-आघूर्ण लगाना पड़ता है। इसी प्रकार दोनों पहियों को एक-साथ घुमाकर छोड़ देने पर देने पर दूसरा पहिया अधिक देर तक घूमता रहता है। इससे निष्कर्ष निकलता है कि दूसरे पहिये का जड़त्व आघूर्ण पहले पहिये की अपेक्षा अधिक है। अतः किसी पिण्ड के द्रव्यमान का जितना अधिक भाग घूर्णन अक्ष से दूर होगा, उसका जड़त्व आघूर्ण उतना ही अधिक होगा।



चित्र–6

दूसरे उदाहरण के रूप में समान द्रव्यमान और समान त्रिज्या होने पर भी केन्द्र से गुजरने वाले लम्बवत् अक्ष के परितः एक वलय (ring) का जड़त्व आघूर्ण एक चकती (disc) के जड़त्व आघूर्ण की अपेक्षा अधिक होता है। इसका कारण यह कि वलय की स्थिति में घूर्णन अक्ष के परितः कणों की प्रभावी दूरी (घूर्णी त्रिज्या *K*) का मान चकती की प्रभावी दूरी से अधिक होता है।

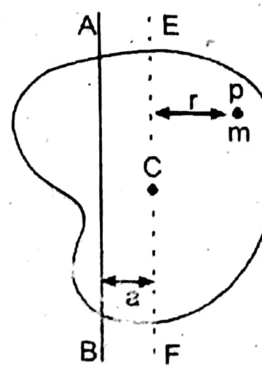
अतः उपर्युक्त विवेचना से स्पष्ट होता है कि–

"किसी घूर्णन अक्ष के परितः किसी पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण पिण्ड के द्रव्यमान के साथ-साथ घूर्णन अक्ष के परितः पिण्ड के द्रव्यमान वितरण पर भी निर्भर करता है।"

प्रश्न 10. समान्तर अक्ष प्रमेय का कथन देते हुए सिद्ध कीजिये। (2016)

उत्तर–समान्तर अक्ष प्रमेय (Theorem of parallel axes)– "किसी पिण्ड का किसी अक्ष *AB* के परितः जड़त्व आघूर्ण *I* (चित्र- 7) उस पिण्ड के द्रव्यमान-केन्द्र (centre of mass) *C* में से जाने वाली समान्तर अक्ष EF के परितः जड़त्व आघूर्ण (I_{cm}) तथा पिण्ड के द्रव्यमान M व दोनों के बीच की लम्ब दूरी a के गुणनफल के योग के बराबर होता है।"

अतः $$I = I_{cm} + Ma^2$$



चित्र 7.

उपपत्ति– चित्र में प्रदर्शित समतल पटल (plane lamina) का द्रव्यमान केन्द्र C है। इसके तल में स्थित अक्ष AB के परितः इसका जड़त्व आघूर्ण I है तथा इस अक्ष के समान्तर एवं C से गुजरने वाली अक्ष EF के परितः जड़त्व आघूर्ण I_{cm} है। माना दोनों समान्तर अक्षों AB व EF के बीच की लम्बवत दूरी a है। माना अक्ष EF से r दूरी पर स्थित m द्रव्यमान का एक कण P है। इसकी अक्ष AB से दूरी $(r + a)$ होगी। इस अक्ष के परितः इस कण का जड़त्व आघूर्ण

$$I = m(r + a)^2$$

अतः पूरी पटल का इस अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण

$$I = \Sigma m (r + a)^2 = \Sigma m (r^2 + a^2 + 2ra)$$
$$= \Sigma mr^2 + \Sigma ma^2 + \Sigma 2mra$$
$$= \Sigma mr^2 + a^2 \Sigma m + 2a \Sigma mr$$

परन्तु $\Sigma mr^2 = I_{cm}$ तथा $\Sigma m = M$ ... (1)

तथा चूँकि किसी पटल के समस्त कणों का पटल के द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष के परितः आघूर्ण शून्य होता है; अतः $\Sigma mr = 0$,

अब समीकरण (1) से,

$$I = I_{cm} + a^2 M + 0$$

या $\quad$ $I = I_{cm} + Ma^2$ **(यह सिद्ध करना था)**

प्रश्न 11. लम्ब अक्षों की प्रमेय का कथन स्पष्ट करते हुए सिद्ध कीजिये।

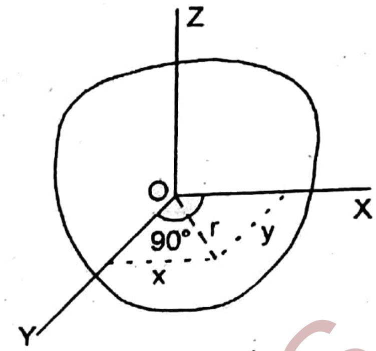
उत्तर– लम्ब अक्षों की प्रमेय (Theorem of perpendicular axes)–" किसी समतल पटल का उसके तल में ली गयी दो परस्पर लम्बवत् अक्षों OX व OY के परितः जड़त्व आघूर्णों का योग इन अक्षों के कटान-बिन्दु O में होकर जाने वाली तथा पटल के तल के लम्बवत् अक्ष OZ के परितः जड़त्व आघूर्ण के बराबर होता है।"

इस प्रकार पटल का अक्ष OZ के परितः जड़त्व आघूर्ण

$$I_z = I_x + I_y$$

जहाँ I_x तथा I_y पटल का क्रमशः अक्ष OX व OY के परितः जड़त्व आघूर्ण है।

उपपत्ति– चित्र – 8 में प्रदर्शित एक समतल पटल के तल में स्थित परस्पर लम्बवत् दो अक्ष OX तथा OY ली गयी है।। इन दोनों के कटान बिन्दु O से गुजरने वाली तथा पटल के तल के लम्बवत् अक्ष OZ ली गयी है।



चित्र–8.

माना ऊर्ध्वाधर अक्ष OZ से r दूरी पर m द्रव्यमान का कोई कण P स्थित है। अतः इस कण का OZ अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण $= mr^2$

$\therefore$ पूरे पटल का इस अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण

$$I_z = \Sigma mr^2$$

माना P की OX तथा OY अक्षों से दूरियाँ क्रमशः y तथा x हैं।

अतः चित्र- 8 से, $r^2 = x^2 + y^2$

$$I_z = \Sigma m(x^2 + y^2)$$
$$= \Sigma mx^2 + \Sigma my^2$$

परन्तु $\Sigma mx^2 =$ पटल का OY– अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण $= I_y$ तथा $\Sigma my^2 =$ पटल का OX – अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण $= I_x$

$\therefore \quad I_z = I_y + I_x$ अर्थात् $I_z = I_x + I_y$

प्रश्न 12. निम्नलिखित का जड़त्व आघूर्ण के लिए सूत्र लिखिए-

(i) छड़ (Rod) $\quad$ (ii) चकती (Disc)

(iii) वलय (Ring) $\quad$ (iv) गोला (sphere)

उत्तर–

(i) छड़ का जड़त्व आघूर्ण $(I) = \dfrac{Ml^2}{12}$

जहाँ $M =$ छड़ का द्रव्यमान, $l =$ छड़ की लम्बाई

(ii) चकती का जड़त्व आघूर्ण $(I) = \dfrac{1}{2}MR^2$

जहाँ $M =$ चकती का द्रव्यमान, $R =$ चकती की त्रिज्या

(iii) वलय का जड़त्व आघूर्ण $(I) = MR^2$

जहाँ $M =$ वलय का द्रव्यमान, $R =$ वलय की त्रिज्या

(*iv*) ठोस गोले का जड़त्व आघूर्ण $(I) = 2/5\ MR^2$
खोखले गोले का जड़त्व आघूर्ण

$$(I) = 2/5M\left[\frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3}\right]$$

जहां M = ठोस एवं खोखले गोले का द्रव्यमान
R = ठोस गोले की त्रिज्या
R_1, R_2 = आन्तरिक तथा बाह्य त्रिज्यायें।

प्रश्न 13. कोणीय संवेग तथा जड़त्व आघूर्ण में सम्बन्ध स्थापित कीजिये।

उत्तर– कोणीय संवेग तथा जड़त्व आघूर्ण में सम्बन्ध (Relation between Angular momentum and moment of inertia) – माना कोई पिण्ड ω कोणीय वेग से किसी अक्ष के चारों ओर घूर्णन गति कर रहा है। पिण्ड के समस्त अवयवी कणों का कोणीय वेग भी ω ही होगा, परन्तु प्रत्येक का रेखीय वेग भिन्न-भिन्न होगा। माना घूर्णन अक्ष से r_1, r_2, r_3 ... दूरियों पर स्थित अवयवी कणों के द्रव्यमान क्रमशः m_1, m_2, m_3 ,... तथा उनके रेखीय वेग क्रमशः v_1, v_2, v_3 .... हैं।

m_1 द्रव्यमान के कण का रेखीय वेग $v_1 = r_1 \times \omega$

अतः इस कण का रेखीय संवेग

$$P_1 = m_1 \times v_1 = m_1 \times r_1\,\omega$$
$$(\because v_1 = r_1\omega)$$

इस रेखीय संवेग p_1 का घूर्णन अक्ष के परितः आघूर्ण

$$= p_1 \times r_1$$
$$= m_1 \times r_1\omega \times r_1$$
$$= m_1 r_1^2\,\omega$$

इसी प्रकार अन्य कणों के रेखीय संवेगों के घूर्णन अक्ष के परितः आघूर्ण क्रमशः $m_2 r_2^2\,\omega, m_3 r_3^2\,\omega$, ... होंगे।

अतः पिण्ड का घूर्णन अक्ष के परितः कोणीय संवेग

J = पिण्ड के सभी अवयवी कणों के रेखीय संवेगों के आघूर्णों का योग

$$= m_1 r_1^2\,\omega + m_2 r_2^2\,\omega + m^3 r_3^2\,\omega + ...$$
$$= (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + ...)\omega$$
$$= (\Sigma mr^2)\omega$$

परन्तु Σmr^2 = घूर्णन अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण I

$$\therefore \quad J = I\omega$$

अर्थात् **कोणीय संवेग = जड़त्व आघूर्ण × कोणीय वेग**

इस सूत्र के आधार पर जड़त्व आघूर्ण की परिभाषा– सूत्र $J = I \times \omega$ में यदि $\omega = 1$ रेडियन/सेकण्ड तो $J = I$

अतः **"किसी पिण्ड के जड़त्व आघूर्ण का मान घूर्णन अक्ष के परितः पिण्ड के कोणीय संवेग के परिणाम के बराबर होता है जबकि पिण्ड एक रेडियन/ सेकण्ड के कोणीय वेग से घूर्णन गति कर रहा है।"**

प्रश्न 14. कोणीय संवेग और घूर्णन गतिज ऊर्जा में सम्बन्ध स्थापित कीजिए।

उत्तर– यदि किसी घूर्णन अक्ष के परितः किसी पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण I तथा कोणीय वेग ω हो तो उस पिण्ड का उसी घूर्णन अक्ष के परितः कोणीय संवेग

$$J = I\omega \quad ...(1)$$

तथा घूर्णन गतिज ऊर्जा,

$$K_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad ....(2)$$

समी॰ (2) से,

$$K_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(I\omega)\times\omega$$

परन्तु समी॰ (1) से, $I\omega = J$

$$\therefore \quad K_{rot} = \frac{1}{2}(J)\times\omega$$

अथवा
$$J = \frac{2K_{rot}}{\omega}$$

$$\text{अर्थात् कोणीय संवेग} = \frac{2 \times \text{घूर्णन गतिज ऊर्जा}}{\text{कोणीय वेग}}$$

यही कोणीय संवेग और घूर्णन गतिज ऊर्जा में अभीष्ट सम्बन्ध है।

प्रश्न 15. बल आघूर्ण तथा जड़त्व आघूर्ण में सम्बन्ध स्थापित कीजिये।

उत्तर– बल आघूर्ण तथा जड़त्व आघूर्ण में सम्बन्ध– माना कोई पिण्ड किसी घूर्णन अक्ष के परितः अचर कोणीय त्वरण α से घूर्णन गति कर रहा है। पिण्ड के सभी कणों का कोणीय त्वरण α ही होगा परन्तु रेखीय त्वरण अलग-अलग होंगे। माना कि पिण्ड के एक कण का द्रव्यमान m_1 है तथा इसकी घूर्णन अक्ष से दूरी r_1 है। तब इस कण का रेखीय त्वरण $a_1 = r_1\alpha$

इस कण पर लगने वाला बल F_1 = द्रव्यमान × त्वरण

$$F_1 = m_1 \times a_1 = m_1 \times (r_1 \alpha) = m_1 r_1 \alpha$$

बल F_1 का घूर्णन अक्ष के परित:

$$\text{आघूर्ण} = \text{बल} \times \text{दूरी}$$
$$= F_1 \times r_1$$
$$= (m_1 r_1 \alpha) \times r_1$$
$$= m_1 r_1^2 \alpha$$

इसी प्रकार यदि पिण्ड के अन्य कणों के द्रव्यमान m_2, m_3, ... हैं तथा उनकी घूर्णन अक्ष से दूरियाँ क्रमश; r_2, r_3... हैं, तो उस पर कार्य करने वाले बल-आघूर्ण क्रमशः $m^2_2 r^2_2 \alpha$ तथा $m_3 r_3^2 \alpha$.. होंगे।

अत: पिण्ड पर कार्यकारी सम्पूर्ण बल-आघूर्ण τ पिण्ड के सभी कणों पर कार्य करने वाले बलों के आघूर्णों के योग के बराबर होगा।

$$\therefore \quad \tau = m_1 r_1^2 \alpha + m_2 r_2^2 \alpha + m_3 r_3^2 \alpha + \ldots$$
$$= (m_1 r_1^2 + m_2^4 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots)\alpha$$
$$= (\Sigma m r^2)\alpha$$

परन्तु $\Sigma m r^2$ = पिण्ड का घूर्णन अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण I

अत: $\tau = I \times \alpha$

अर्थात् बल-आघूर्ण = जड़त्व आघूर्ण × कोणीय त्वरण

उपरोक्त सूत्र के आधार पर जड़त्व आघूर्ण की परिभाषा-

उपर्युक्त सूत्र में यदि $\alpha = 1$ रेडियन/सेकण्ड² तो $\tau = I$

अत: किसी वस्तु का किसी दी हुई अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण उस बल-आघूर्ण के बराबर होता है जो वस्तु में एकांक कोणीय त्वरण उत्पन्न कर दे।

प्रश्न 16. फ्लाई व्हील की संकल्पना दीजिए।

उत्तर– फ्लाई व्हील (Fly wheel)– जड़त्व आघूर्ण के गुण का सबसे अच्छा उपयोग इंजनों में प्रयुक्त गति पालक चक्र में होता है। इंजन के धुरी-दण्ड (shaft) को घुमाने वाला बल आघूर्ण घटता-बढ़ता रहता है जिससे धुरी-दण्ड के घूमने की गति एकसमान नहीं रह पाती। इंजन के धुरी-दण्ड को नियमित गति से घुमाने के लिए एक बहुत बड़ा एवं भारी पहिया धुरी-दण्ड पर लगा दिया जाता है जिसे गतिपालक चक्र कहते हैं। इंजन धुरी-दण्ड पर लगा दिया जाता है जिसे गतिपालक चक्र कहते हैं। इंजन का पिस्टन इसी पहिए को घुमाता है। इस पहिए का अधिकांश द्रव्यमान उसकी परिधि (rim) पर केन्द्रित होता है जिससे इसका जड़त्व आघूर्ण बहुत अधिक हो जाता है। अधिक जड़त्व आघूर्ण होने के कारण पहिया एक बार घूमने के बाद काफी समय तक नियत चाल से घूमता रहता है। इसके अतिरिक्त, जब पिस्टन पहिए पर कोई बल नहीं लगता है, तब भी पहिया अपने जड़त्व आघूर्ण के कारण कुछ देर तक घूमता रहता है अर्थात् गतिपालक चक्र पिस्टन को मृत केन्द्रों (dead centres) से निकाल ले जाता है। बच्चों के खिलौने वाली मोटर के नीचे भी एक छोटा-सा गतिपालक चक्र लगा दिया जाता है। इसे पृथ्वी से रगड़कर घुमा देते हैं तथा मोटर को छोड़ देते है। इसी गतिपालक चक्र के जड़त्व आघूर्ण के कारण ही मोटर कुछ देर तक चलकर रूक जाती है। पृथ्वी भी एक बड़े गतिपालक चक्र के समान है जो अपने अधिक जड़त्व आघूर्ण के कारण अपनी अक्ष के परित: सदैव एक समान चाल से घूमती रहती है।

कृत्रिम उपग्रहों पर भी अत्यधिक जड़त्व आघूर्ण का पहिया लगाकर उसकी गति को नियमित रखा जाता है।

प्रश्न 17. घूर्णन गतिज ऊर्जा (Rotational Kinetic energy) का विस्तारपूर्वक वर्णन कीजिये।

उत्तर– घूर्णन गतिज ऊर्जा– माना कोई पिण्ड अक्ष के परित: एक समान कोणीय वेग ω से घूर्णन गति कर रहा है। इस पिण्ड के सभी अवयवी कणों का कोणीय वेग ω ही होगा जबकि उनके रेखीय वेग भिन्न-भिन्न होंगे। माना घूर्णन अक्ष से r_1, r_2, r_3 .... दूरियों पर स्थित पिण्ड के अवयवी कणों के द्रव्यमान क्रमशः m_1, m_2, m_3,..... तथा इनके रेखीय वेग क्रमशः v_1, v_2, v_3,.... हैं।

चूँकि प्रत्येक कण का रेखीय वेग, कण की घूर्णन-अक्ष से दूरी तथा कण के कोणीय वेग के गुणनफल के बराबर होता है, अत: m_1 द्रव्यमान के कण का रेखीय वेग $v_1 = r_1 \times \omega$

इस कण की रेखीय गतिज ऊर्जा

$$= \frac{1}{2} m_1 \times v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 (r_1 \omega)^2$$
$$= \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \omega^2$$

इसी प्रकार अन्य कणों की रेखीय गतिज ऊर्जाएँ क्रमशः $\frac{1}{2} m_2 r_2^2 \omega^2 ; \frac{1}{2} m_3 r_3^2 \omega^2 ;$.... होंगी।

पिण्ड के सभी अवयवी कणों की रेखीय गतिज ऊर्जाओं का योग ही घूर्णन गति करते पिण्ड की कुल गतिज ऊर्जा

Energy Shiva

होगी तथा यही पिण्ड की घूर्णन गतिज ऊर्जा कहलाती है। अतः पिण्ड गतिज ऊर्जा

$$K_{rot} = \frac{1}{2}m_1r_1^2\omega^2 + \frac{1}{2}m_2r_2^2\omega^2 + \frac{1}{2}m_3r_3^2\omega^2 + ...$$

$$= \frac{1}{2}(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + ...)\omega^2$$

$$= \frac{1}{2}(\Sigma mr^2)\omega^2$$

परन्तु Σmr^2 = घूर्णन अक्ष के परितः पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण I

$$\therefore \quad K_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$$

अर्थात् घूर्णन गतिज ऊर्जा $K_{rot} = \frac{1}{2}$ (जड़त्व आघूर्ण) $\times$ (कोणीय वेग)^2

प्रश्न 18. रेखीय गति एवं घूर्णन गति का तुलनात्मक अध्ययन कीजिये।

उत्तर–रेखीय गति एवं घूर्णन गति की तुलना (Comparison of linear motion and rotational motion)–

क्र.सं.	रेखीय गति	घूर्णन गति
1.	जड़त्वीय द्रव्यमान m	जड़त्व आघूर्ण I
2.	रेखीय विस्थापन s	कोणीय विस्थापन θ
3.	रेखीय वेग $v = \frac{ds}{dt}$	कोणीय त्वरण $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
4.	रेखीय त्वरण $a = \frac{dv}{dt}$	कोणीय त्वरण $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
5.	रेखीय संवेग $p = mv$	कोणीय संवेग $J = I\omega$
6.	बल F = ma $= \frac{dp}{dt}$	बल-आघूर्ण $\tau = I_\alpha = \frac{dJ}{dt}$
7.	रेखीय गतिज ऊर्जा $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$	घूर्णन गतिज ऊर्जा $K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{J^2}{2I}$
8.	कार्य $W = Fs$	कार्य $W = \tau\theta$
9.	शक्ति $P = Fv$	शक्ति $P = \tau\omega$
10.	रेखीय आवेग $F.dt = dp$	कोणीय आवेग $\tau dt = dL$ क
11.	रेखीय संवेग संरक्षणः यदि बाह्य बल $F = v$ तो p = नियांतक	कोणीय संवेग संरक्षणः यदि बाह्य बल आघूर्ण $\tau = 0$ तो J = नियतांक
12.	एकसमान त्वरित रेखीय गति के समीकरण (i) $v = u + at$ (ii) $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ (iii) $v^2 = u^2 + 2as$	एकसमान त्वरित घूर्णन गति के समीकरण (i) $\omega = \omega_0 + \alpha t$ (ii) $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ (iii) $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$

प्रश्न 19. 2 Kg द्रव्यमान और 10 cm त्रिज्या की एक डिस्क अपने अक्ष के परितः घूर्णन करते हुए 10/π चक्कर/सेकण्ड लगाती है। ज्ञात कीजिए।

1. इसकी घूर्णन गतिज ऊर्जा

2. इसे 30 sec में रोकने के लिए आवश्यक बल आघूर्ण

उत्तर– $M = 2$ Kg

$R = 10$ cm $= 0.1$ m

$n = 10/\pi$ चक्कर/सेकण्ड

1. घूर्णन गतिज ऊर्जा $(K_R) = \frac{1}{2} I\omega^2$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2}\right)(2\pi n)^2$$

$$= \frac{1}{2}\times\left(\frac{2\times 0.10^2}{2}\right)\times\left(2\times\pi\times\frac{10}{\pi}\right)^2$$

$= 2$ जूल

2. $\omega = \omega_0 + \alpha t$

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t}$$

$$= \frac{0 - 2\times\pi\times\frac{10}{\pi}}{30} = -\frac{2}{3}\text{ rad / sec}^2$$

बल आघूर्ण $(\tau) = I\alpha$

$$= \frac{MR^2}{2}\times\alpha$$

$$= \frac{2\times 0.10^2}{2}\times\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$= -6.67\times 10^{-5}$ N-m

प्रश्न 20. 0.5 किग्रा. मी.² जड़त्व आघूर्ण एवं 20 सेमी. त्रिज्या का एक पहिया अपने अक्ष पर 20 रेडियन/सेकण्ड के कोंणीय वेग से घूम रहा है। यदि पहिये पर उक्त अवस्था में 200 ग्राम का द्रव्यमान और रख दें तो पहिये के नये कोणीय वेग की गणना कीजिये।

उत्तर– प्रश्न के अनुसार:

जड़त्व आघूर्ण $(I) = 0.5$ किग्रा. मी^{2}

त्रिज्या $(r) = 20$ सेमी.

कोणीय वेग $(\omega) = 20$ रेडियन/सेकण्ड

द्रव्यमान $(m) = 200$ gm

जड़त्व आघूर्ण $= I_1 = 0.5$ kg-m^2

$$R = 20 \text{ cm} \Rightarrow \frac{20}{100}\text{ m} = 0.2 \text{ m}$$

$\omega = 20$ रेडियन/sec

$M_2 = M_1$ kg $+ 200$ gram

$= (M_1 + 0.2)$ Kg

वृत्तीय पटल के अक्ष में

$$I_1 = \frac{M_1 R^2}{4}$$

$$0.5 = \frac{M_1\times(0.2)^2}{4}$$

$$M_1 = \frac{0.5\times 4}{0.2\times 0.2} = 50 \text{ Kg}$$

$M_2 = 50 + 0.2$

$M_2 = 50.2$ Kg

कोणीय संवेग के संरक्षण सिद्धान्त से

$$I_1\omega_1 = I_2\,\omega_2$$

$$0.5\times 20 = \frac{M_2 R^2}{4}\omega_2$$

$$10 = \frac{50.2\times 0.2\times 0.2}{4}\times\omega_2$$

$$W_2 = \frac{10\times 4}{50.2\times 0.2\times 0.2}$$

$= 19.92$ रेडियन /sec

प्रश्न 21. गाड़ी के एक पहिये का व्यास 1 मीटर है। गाड़ी दो चक्कर प्रति सेकण्ड के प्रारम्भिक कोणीय वेग तथा 3 चक्कर/ सेकण्ड² के एक समान कोणीय त्वरण से चलना प्रारम्भ करती है। 10 सेकण्ड पश्चात् ज्ञात कीजिए- (*i*) पहिये द्वारा तय की गयी दूरी, (*ii*) पहिये का रेखीय वेग (*iii*) इस क्षण पहिये की परिधि पर स्थित कण का स्पर्श रेखीय त्वरण।

उत्तर– (*i*) प्रारम्भिक कोणीय वेग $\omega_0 = 2$ चक्कर/सेकण्ड

समयान्तराल $t = 10$ सेकण्ड, कोणीय त्वरण $\alpha = 3$ चक्कर/सेकण्ड^2

इस समयान्तराल में पहिये का कोणीय विस्थापन

$$\theta = \omega_0\times t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$\therefore \quad \theta = 2\times10+\frac{1}{2}\times3\times10^2 = 170$ चक्कर

$= 170 \times 2\pi$ रेडियन

$= 340\pi$ रेडियन

पहिये की त्रिज्या $r =$ व्यास/2 = 1 मीटर/2 = 0.5 मीटर

∴ पहिये द्वारा तय की गयी दूरी $s = r \times \theta = 0.5 \times 340\pi$ मीटर

$= 170 \times 3.14 = 533.8$ मीटर

(*ii*) $t = 10$ सेकण्ड पर कोणीय वेग

$\omega = \omega_0 + \alpha t = 2 + 3 \times 10$

$= 32$ चक्कर/सेकण्ड

$= 32 \times 2\pi$ रेडियन/सेकण्ड

∴ रेखीय वेग $v = r \times \omega = 0.5 \times 32 \times 2\pi$ मी/से

$= 0.5 \times 32 \times 2 \times 3.14$ मी/से

$=$ **100.48** मी/से

(*iii*) कण का स्पर्श रेखीय त्वरण

$a_T = r\alpha = 0.5 \times (3 \times 2\pi)$ मी/से

$= 0.5 \times 3 \times 2 \times 3.14$ मी/से^{2}

$= 9.42$ मी/से^{2}

प्रश्न 22. किसी पिण्ड का कोणीय संवेग 75.36 जूल-सेकण्ड है तथा इसके घूर्णन की दर 24 चक्कर/से. है। पिण्ड के घूर्णन अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण की गणना कीजिये।

उत्तर– कोणीय संवेग $J = 75.36$ जूल-सेकण्ड तथा प्रति सेकण्ड चक्करों की संख्या $n = 24$.

∴ पिण्ड का कोणीय वेग

$\omega = 2\pi n = 2 \times 3.14 \times 24$ रेडियन/सेकण्ड

$= 150.72$ रेडियन/सेकण्ड

∴ सूत्र $J = I \times \omega$ से,

पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण

$$I = \frac{J}{\omega} = \frac{75.36 \text{ जूल-सेकण्ड}}{150.72 \text{ रेडियन/सेकण्ड}}$$

$= 0.5$ किग्रा-मीटर^2

प्रश्न 23. एक इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान 9×10^{-31} किग्रा० है। यह किसी परमाणु के नाभिक के चारों ओर 2Å त्रिज्या की वृत्तीय कक्षा में 10^6 मी०/सेकण्ड की चाल से घूमता है। इलेक्ट्रॉन की रेखीय गतिज ऊर्जा तथा कोणीय संवेग की गणना कीजिये।

उत्तर– इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान $m = 9.0 \times 10^{-31}$ किग्रा

घूर्णन अक्ष से इलेक्ट्रॉन की दूरी $r =$ वृत्तीय कक्षा की त्रिज्या

$= 2.0$ Å $= 2 \times 10^{-10}$ मीटर

इलेक्ट्रॉन की चाल $v = 10^6$ मी/से

इलेक्ट्रॉन की रेखीय गतिज ऊर्जा

$K_T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}$ (9.0 × 10^{-31} किग्रा.) × (10^6 मी/से)^2

$= 4.5 \times 10^{-19}$ किग्रा-मी2/से^{2}

$= 4.5 \times 10^{-19}$ जूल

इलेक्ट्रॉन का कोणीय संवेग

$J = I \times \omega$

परन्तु $v = r \times \omega$ से, $\omega = v/r$ तथा $I = mr^2$

$\therefore \quad J = (mr^2) \times (v/r) = mrv$

∴ कोणीय संवेग (J) = (9 × 10^{-31} Kg) × (2 × 10^{-10} मीटर) × (10^6 मी/से.)

$= 1.8 \times 10^{-34}$ Kg-m^{-2}/सेकण्ड

प्रश्न 24. 10 किग्रा द्रव्यमान तथा 0.4 मी व्यास की एक रिंग पृथ्वी पर 2100 चक्कर प्रति मिनट के कोणीय वेग से लुढ़क रही है। घूर्णन गतिज ऊर्जा तथा कुल गतिज ऊर्जा ज्ञात कीजिए। रिंग की सम्पूर्ण गतिज ऊर्जा में कितने प्रतिशत घूर्णन ऊर्जा है?

उत्तर– रिंग का द्रव्यमान M = 10 किग्रा.

रिंग की त्रिज्या $R =$ व्यास/2 = 0.4 मी/2 = 0.2 मी

प्रति सेकण्ड चक्करों की संख्या

$$n = \frac{2100}{60} = 35 \text{ चक्कर}$$

∴ रिंग का कोणीय वेग

$$\omega = 2\pi n = 2\times\frac{22}{7}\times35$$

$= 220$ रेडियन/सेकण्ड

घूर्णन गतिज ऊर्जा

$$K_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(MR^2)\times\omega^2$$

$$= \frac{1}{2} \text{ 10 किग्रा} \times (0.2)^2 \times (\text{220 रेडियन/सेकण्ड})^2$$

$$= \text{9680 जूल}$$

कुल गतिज ऊर्जा K = घूर्णन गतिज ऊर्जा + स्थानान्तरीय गतिज ऊर्जा

$$= \frac{1}{2}MR^2\omega^2 + \frac{1}{2}Mv^2$$

$$= \frac{1}{2}MR^2\omega^2 + \frac{1}{2}M(R\omega)^2 = MR^2\omega^2$$

$$= \text{10 किग्रा} \times (\text{0.2 मी})^2 \times (\text{220 रेडियन/सेकण्ड})^2$$

$$= \text{19360 जूल}$$

∴ सम्पूर्ण गतिज ऊर्जा में घूर्णन गतिज ऊर्जा का प्रतिशत

$$= \frac{K_{rot}}{K}\times 100$$

$$= \frac{\text{9680 जूल}}{\text{19360 जूल}} \times 100 = 50\%$$

प्रश्न 25. एक गतिपालक चक्र (Flywheel) की चाल 60 चक्कर/मिनट से 300 चक्कर प्रति मिनट करने के लिए 484 जूल ऊर्जा खर्च करनी पड़ती। इसका जड़त्व आघूर्ण बताओ।

उत्तर– माना गतिपालक चक्कर का जड़त्व आघूर्ण $= I$

यदि उसके प्रारंभिक और अन्तिम कोणीय वेग क्रमश: ω_1 तथा ω_2 है तो उसकी संगत गतिज ऊर्जा $\frac{1}{2}I\omega_1^2$ तथा $\frac{1}{2}I\omega_2^2$ होगी।

परन्तु $\omega_1 = 2\pi rn = 2\pi$ रेडियन/से

$n_1 = 60\ \pi$ चक्कर प्रति मिनट

$= (60/60) = 1$ चक्कर प्रति सेकण्ड

तथा $\omega_2 = 2\pi n_2 \times 2\pi \times 5 = 10\ \pi$ रेडियन/सेकण्ड

क्योंकि $n_2 = 300$ चक्कर प्रति मिनट

$\frac{300}{60} = 5$ चक्कर प्रति मिनट

$$\therefore \quad E_1 = \frac{1}{2}I\omega_1^2 = \frac{1}{2}\times I\times(2\pi)^2 = 2\ I\pi^2$$

$$E_2 = \frac{1}{2}I\omega_2^2 = \frac{1}{2}\times I\times(10\pi)^2$$

$$= 50\ I\ \pi^2$$

अत: गतिज ऊर्जा में वृद्धि = व्यय की गयी ऊर्जा

$\therefore\ 50\ I\pi^2 - 2I\pi^2 = 484$

$$\therefore \quad I = \frac{484}{48\pi^2} = \frac{484}{48\times(3.14)^2}$$

$$= \text{1.02 किग्रा/मी}^2$$

प्रश्न 26. 1 किग्रा. द्रव्यमान का एक पिण्ड 2 मीटर व्यास के वृत्ताकार पथ पर 31.4 सेकण्ड में 10 चक्कर की दर से घूर्णन कर रहा है। पिण्ड के (*i*) कोणीय संवेग तथा (*ii*) घूर्णन गतिज ऊर्जा की गणना कीजिये।

उत्तर– पिण्ड का द्रव्यमान $m = 1.0$ किग्रा तथा पिण्ड की घूर्णन अक्ष से दूरी $r = 2.0/2 = 1.0$ मीटर।

∴ पिण्ड का घूर्णन अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण

$I = mr^2 = (1.0$ किग्रा$) \times (1.0$ मीटर$)^2 = 1.0$ किग्रा-मीटर^2

पिण्ड का कोणीय वेग $\omega = 2\pi n$, जहाँ n प्रति सेकण्ड चक्करों की संख्या है। यहाँ $n = 10/31.4$

∴ $\omega = 2\times 3.14\times(10/31.4 = 2$ रेडियन/सेकण्ड

(*i*) कोणीय संवेग $J = I\omega = 1.0$ किग्रा-मीटर^2 $\times 2$ रेडियन/सेकण्ड

$= 2.0$ किग्रा-मीटर^2 सेकण्ड

(*ii*) पिण्ड की घूर्णन गतिज ऊर्जा

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\times 1.0\times(2)^2 = \textbf{2.0 जूल}$$

Engg. Shiva

अध्याय

5 ग्रहों तथा उपग्रहों की गति

Motion of Planets and Satellites

एक शब्दीय उत्तर (ONE WORD ANSWERS)

प्रश्न 1. पृथ्वी के केन्द्र पर 'g' का मान कितना होता है?

उत्तर– शून्य (Zero)

प्रश्न 2. g (गुरुत्वीय त्वरण) तथा G (गुरुत्वीय नियतांक) में सम्बन्ध लिखिए।

उत्तर– $g = \dfrac{G M_e}{R_e^2}$

प्रश्न 3. G (गुरुत्वाकर्षण नियतांक) का मान मात्रक सहित लिखिए।

उत्तर– 6.67×10^{-11} न्यूटन-मी^{2}/किग्रा॰^{2} है।

प्रश्न 4. गुरुत्वीय त्वरण का प्रमाणिक मान बताइये।

उत्तर– समुद्र तट पर 9.81 मी॰/से॰^{2}

प्रश्न 5. पृथ्वी तल पर पलायन वेग का मान कितना होता है?

उत्तर– 11.2 किमी॰/ सेकण्ड

प्रश्न 6. गुरुत्वीय विभव का मात्रक तथा विमीय सूत्र लिखिए।

उत्तर– जूल/किग्रा॰, $[L^2T^{-2}]$

प्रश्न 7. कैपलर के ग्रहों की गति के तृतीय नियम का गणितीय रूप लिखिए।

उत्तर– $T^2 \propto r^3$ त

प्रश्न 8. पृथ्वी की परिक्रमा कर रहे अन्तरिक्ष यान में बैठे मनुष्य का भार कितना होता है?

उत्तर– शून्य

प्रश्न 9. उपग्रह की बन्धन ऊर्जा का सूत्र लिखिए।

उत्तर– $E_B = +\left(\dfrac{G M_e m}{2r}\right)$

प्रश्न 10. पृथ्वी के परितः वृत्ताकार कक्षा में घूमते हुए कृत्रिम उपग्रह के परिक्रमण काल का सूत्र प्रयुक्त संकेतांकों का अर्थ बताते हुए लिखिए।

उत्तर– $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{r}{G M_e}}$, जहाँ $r = (R_e + h)$

अति लघु उत्तरीय प्रश्न (VERY SHORT ANSWER QUESTIONS)

प्रश्न 1. न्यूटन के सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण नियम को स्पष्ट कीजिये।

उत्तर– किन्हीं दो द्रव्य कणों के बीच लगने वाला गुरुत्वाकर्षण बल कणों के द्रव्यमानों के गुणनफल के अनुक्रमानुपाती तथा उनके बीच की दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होता है। बल की दिशा दोनों कणों को मिलाने वाली रेखा के साथ होती है।

प्रश्न 2. गुरुत्वाकर्षण नियतांक (G) को परिभाषित कीजिये।

उत्तर– गुरुत्वाकर्षण नियतांक उस पारस्परिक आकर्षण बल के बराबर होता है जो एकांक दूरी पर रखे एकांक द्रव्यमान के दो द्रव्य कणों के बीच कार्य करता है।

प्रश्न 3. गुरुत्वीय त्वरण (g) से आप क्या समझते हैं?

उत्तर– स्वतन्त्रतापूर्वक पृथ्वी की ओर गिरती हुई किसी वस्तु के वेग में 1 सेकण्ड में होने वाली वृद्धि अर्थात् त्वरण को गुरुत्वीय त्वरण कहते हैं। इसे g से प्रदर्शित करते हैं।

प्रश्न 4. गुरुत्वीय क्षेत्र से क्या तात्पर्य है?

उत्तर– किसी पिण्ड के चारों ओर स्थित वह क्षेत्र जिसके अन्तर्गत स्थित अन्य पिण्डों पर इस पिण्ड का गुरुत्वाकर्षण बल क्रियाशील रहता है, उस पिण्ड का गुरुत्वीय क्षेत्र कहलाता है।

प्रश्न 5. पलायन वेग से आप क्या समझते हैं?

उत्तर– वह न्यूनतम वेग जिससे किसी वस्तु को पृथ्वी तल से फेंकने पर वह पृथ्वी के आकर्षण क्षेत्र से बाहर निकल जाये अर्थात् वापस लौटकर पृथ्वी पर न आ सके, पलायन वेग कहलाता है। इसे v_e से व्यक्त करते हैं।

प्रश्न 6. परिक्रमण काल (Period of revolution) को परिभाषित कीजिये।

उत्तर– किसी उपग्रह द्वारा ग्रह के चारों ओर एक चक्कर पूरा करने में उसके द्वारा लिया गया समय उपग्रह का परिक्रमण काल कहलाता है।

प्रश्न 7. कृत्रिम उपग्रह से आप क्या समझते हैं?

उत्तर– यदि किसी पिण्ड को पृथ्वी तल से कुछ ऊंचाई पर ले जाकर उसको 8 किमी./सेकण्ड का स्पर्श-रेखीय वेग दे दिया जाये तो वह पिण्ड पृथ्वी के चारों ओर वृत्ताकार कक्षा में परिक्रमा करने लगेगा। यही कृत्रिम उपग्रह कहलायेगा।

प्रश्न 8. पृथ्वी के दो कृत्रिम उपग्रहों के द्रव्यमान m व $4m$ है। ये एक ही कक्षा में परिक्रमण करते हैं। इनकी चाल किस अनुपात में होगी।

mÙj µ चूंकि उपग्रह की कक्षीय चाल $v_0 = \sqrt{(GM_e / r)}$ उसके द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करती, अत: दो एक ही चाल से परिक्रमण करेंगे। अत: इनकी चालों का अनुपात = 1:1.

प्रश्न 9. चन्द्रमा पर यात्री उतरने से पहले अपनी पीठ पर भारी वजन क्यों बाँधते हैं?

उत्तर– चूंकि चन्द्रमा पर गुरुत्वीय त्वरण 'g' का मान कम होता है जिससे यात्री का भार कम हो जायेगा। इसलिए वे अपनी पीठ पर पहले वज़न बांधकर तब चन्द्रमा पर उतरते हैं।

प्रश्न 10. पृथ्वी पर सूर्य का गुरुत्वाकर्षण बल कार्य करता है, परन्तु फिर भी पृथ्वी सूर्य में क्यों नहीं गिरती?

उत्तर– सूर्य के गुरुत्वाकर्षण बल की दिशा पृथ्वी के वेग की दिशा के लम्बवत् होने से पृथ्वी की कक्षा स्थायी बनी रहती है।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न
(LONG ANSWER QUESTIONS)

प्रश्न 1. गुरुत्वाकर्षण बल को समझाते हुए इसके गुणों की विवेचना कीजिये।

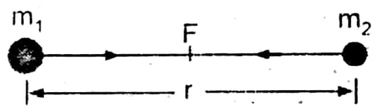
उत्तर– गुरुत्वाकर्षण बल (Gravitational force)– कैपलर के नियमों से प्राप्त निष्कर्षो के आधार पर 1686 ई० में वैज्ञानिक न्यूटन ने बताया कि ब्रह्माण्ड (universe) में प्रत्येक द्रव्य-कण दूसरे द्रव्य-कण को अपनी ओर आकर्षित करता है। इस सर्वव्यापी आकर्षण बल को **गुरुत्वाकर्षण** कहते हैं।

न्यूटन ने इस सर्वव्यापी बल के सम्बन्ध में एक नियम प्रतिपादित किया, जिसे **न्यूटन का गुरुत्वाकर्षण नियम** कहते हैं। इस नियम के अनुसार, **"किन्हीं दो द्रव्य-कणों के बीच लगने वाला गुरुत्वाकर्षण बल कणों के द्रव्यमानों के गुणनफल के अनुक्रमानुपाती तथा उनके बीच की दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होता है। बल की दिशा दोनों कणों को मिलाने वाली रेखा के साथ होती है।"**

यदि m_1 तथा m_2 द्रव्यमान के दो द्रव्य-कण एक-दूसरे से r दूरी पर स्थित हों तथा उनके बीच लगने वाला पारस्परिक आकर्षण बल (गुरुत्वाकर्षण) F हो तो उपर्युक्त नियम के अनुसार–

$$F \propto m_1 \times m_2 \quad \text{तथा} \quad F = 1/r^2$$

$$\text{अत:}\ F \propto \frac{m_1\, m_2}{r^2} \quad \text{अथवा} \quad F = G\left(\frac{m_1\, m_2}{r^2}\right)$$



चित्र-1.

यहाँ G एक समानुपाती नियतांक है जिसका मान कणों की प्रकृति, स्थान, माध्यम, समय, ताप आदि पर निर्भर नहीं करता। यह कणों के द्रव्यमान तथा उनके बीच की दूरी के परिमाण पर भी निर्भर नहीं करता। अत: इसे सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण नियतांक (universal gravitational constant) कहते हैं।

गुरुत्वाकर्षण बलों के मुख्य गुण (Important Properties of Gravitational Forces)

(*i*) ये बल सदैव आकर्षणात्मक होते हैं तथा कभी भी प्रतिकर्षणात्मक नहीं होते हैं।

(*ii*) ये प्रकृति में सबसे दुर्बल बल होते हैं।

(*iii*) ये विस्तृत दूरियों पर भी कार्यरत रहते हैं।

(*iv*) ये दूरी सम्बन्धी व्युत्क्रम वर्ग के नियम का पालन करते हैं।

(*v*) ये केन्द्रीय बल होते हैं अर्थात् दोनों वस्तुओं के केन्द्रों को जोड़ने वाली रेखा के अनुदिश कार्य करते हैं।

(vi) ये बल संरक्षी बल होते हैं।

(vii) इनकी उत्पत्ति वस्तुओं के बीच एक विशिष्ट प्रकार के कणों (Gravitons) के विनिमय के कारण होती है।

प्रश्न 2. गुरुत्वाकर्षण एवं गुरुत्वीय त्वरण से आप क्या समझते हैं?

उत्तर– गुरुत्व (Gravity)– न्यूटन के गुरुत्वाकर्षण के नियम के अनुसार, ब्रह्माण्ड में किन्हीं दो वस्तुओं के बीच कार्य करने वाले आकर्षण बल को गुरुत्वाकर्षण कहते हैं। यदि इन दोनों वस्तुओं में से एक पृथ्वी हो तो पृथ्वी द्वारा दूसरी वस्तु पर आरोपित गुरुत्वाकर्षण को गुरुत्व (gravity) कहते हैं। अतः गुरुत्व वह बल है जिससे पृथ्वी किसी वस्तु को अपने केन्द्र की ओर आकर्षित करती है। इस गुरुत्वाकर्षण बल को वस्तु का भार भी कहते हैं। अतः स्पष्ट है कि गुरुत्व, गुरुत्वाकर्षण का एक विशिष्ट उदाहरण है। इसी 'गुरुत्व' बल के कारण स्वतन्त्र रूप से ऊपर फेंकी गयी वस्तुएँ पृथ्वी की सतह पर वापस आ गिरती है।

गुरुत्वीय त्वरण (Acceleration due to Gravity)– गुरुत्व बल के कारण पृथ्वी प्रत्येक वस्तु को अपने केन्द्र की ओर खींचती है। किसी वस्तु को ऊपर उठाकर स्वतन्त्र छोड़ देने पर वह गुरुत्व के कारण नीचे गिरने लगती है, क्योंकि वस्तु पर लगातार आकर्षण बल लगता है, इसलिए गिरते समय उसका वेग लगातार बढ़ता रहता है। दूसरे शब्दों में, वस्तु की गति में त्वरण उत्पन्न हो जाता है। इसी त्वरण को गुरुत्व जनित त्वरण अथवा गुरुत्वीय त्वरण (acceleration due to gravity) कहते हैं।

अतः "स्वतन्त्रतापूर्वक पृथ्वी की ओर गिरती हुई किसी वस्तु के वेग में 1 सेकण्ड में होने वाली वृद्धि अर्थात् त्वरण को गुरुत्वीय त्वरण कहते हैं।" इसे 'g' से प्रदर्शित करते हैं।

अतः गुरुत्वीय त्वरण का SI पद्धति में मात्रक मीटर/सेकण्ड^2 होता है तथा इसका विमीय सूत्र $[LT^{-2}]$ होता है। गुरुत्वीय त्वरण 'g' को दूसरी प्रकार से भी परिभाषित किया जा सकता है। यदि किसी वस्तु का द्रव्यमान m हो तो उस पर लगने वाला गुरुत्वीय बल mg (वस्तु के भार) के बराबर होता है। अतः "गुरुत्वीय त्वरण उस बल के बराबर होता है जिस बल से पृथ्वी एकांक द्रव्यमान की वस्तु को अपने केन्द्र की ओर आकर्षित करती है।" अतः गुरुत्वीय त्वरण का SI पद्धति में मात्रक न्यूटन/किग्रा. भी होता है।

समुद्र तल पर 'g' का मान 9.80 मीटर/सेकण्ड^2 होता है। यह वस्तु के रूप, आकार, द्रव्यमान इत्यादि पर निर्भर नहीं करता, केवल स्थान पर निर्भर करता है।

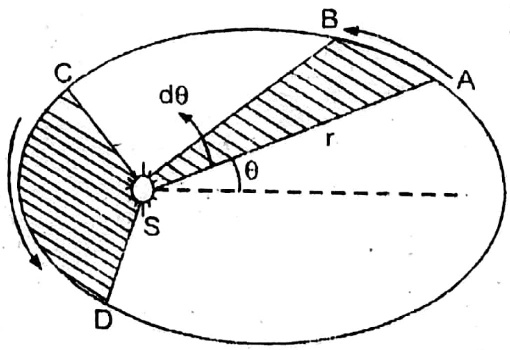
प्रश्न 3. ग्रहों की गति सम्बन्धी कैपलर के नियमों की विवेचना करें।

उत्तर– सत्रहवीं शताब्दी के प्रारम्भ में कैपलर (Kepler) ने खगोलीय प्रेक्षणों के आधार पर सूर्य के चारों ओर ग्रहों की गति से सम्बन्धित निम्नलिखित तीन नियम प्रतिपादित किये–

प्रथम नियम– कक्षाओं का नियम (Law of orbits), सभी ग्रह सूर्य के चारों ओर दीर्घ वृत्ताकार कक्षाओं (elliptical orbits) में चक्कर लगाते हैं तथा सूर्य उस कक्षा के एक फोकस पर स्थित होता है। चित्र 2 में एक ग्रह की दीर्घ वृत्ताकार कक्षा को दर्शाया गया है। सूर्य इसके एक फोकस पर स्थित है।

द्वितीय नियम- क्षेत्रफलों का नियम (Law of areas)– किसी भी ग्रह को सूर्य से मिलाने वाली रेखा समान समयान्तरालों के समान क्षेत्रफल तय (sweep) करती है। अर्थात् प्रत्येक ग्रह की क्षेत्रीय चाल नियत रहती है। चित्र 2 में यदि ग्रह किसी दिये हुए समयान्तराल में C से D तक जाता है तो इस नियम के अनुसार इसका अर्थ यह भी है कि जब ग्रह सूर्य से दूर रहा होता है तो उसकी चाल न्यूनतम होती है तथा जब वह सूर्य के समीपस्थ होता है। तो उसकी चाल अधिकतम होती है।

तृतीय नियम– "प्रत्येक ग्रह का सूर्य के चारों ओर परिक्रमण काल (एक चक्कर पूरा करने का समय) का वर्ग उसकी दीर्घवृत्ताकार कक्ष की अर्द्ध-दीर्घ कक्ष की तृतीय घात अर्थात् घन के अनुक्रमानुपाती होता है।



चित्र-2.

प्रश्न 4. पृथ्वी के तल से ऊंचाई के साथ गुरुत्वीय त्वरण (g) के मान में होने वाले परिवर्तन की विवेचना कीजिये।

उत्तर– "पृथ्वी तल से ऊपर जाने पर ऊँचाई में वृद्धि के साथ-साथ गुरुत्वीय त्वरण का मान घटता जाता है।" इस तथ्य को निम्न प्रकार समझा जा सकता है–

माना पृथ्वी का द्रव्यमान M_e है, जिसको इसके केन्द्र O पर ही निहित माना जा सकता है तथा R_e इसकी त्रिज्या है।

यदि m द्रव्यमान की वस्तु पृथ्वी तल पर बिन्दु A पर स्थित है (चित्र-3) तो न्यूटन के गुरुत्वाकर्षण नियम के अनुसार वस्तु पर पृथ्वी का गुरुत्वाकर्षण बल

$$F = \frac{GM_e m}{R_e^2}$$

यह बल ही पृथ्वी तल पर इस वस्तु का भार mg होगा; जहाँ g = पृथ्वी तल पर गुरुत्वीय त्वरण है।

अत: $$mg = \frac{GM_e m}{R_e^2} \qquad ...(1)$$

जब इस वस्तु को पृथ्वी तल से h ऊँचाई पर स्थित बिन्दु P पर रखा जायेगा, जहाँ गुरुत्वीय त्वरण 'g' हो तो उपर्युक्त समीकरण (1) के अनुरूप इस स्थान पर

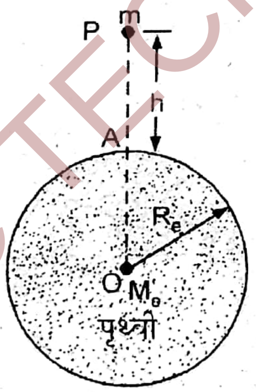
$$mg' = \frac{GM_e m}{(R_e + h)^2} \qquad ...(2)$$

जहाँ दूरी $OP = (OA + AP) = (R_e + h)$

समीकरण (2) को समीकरण (1) से भाग देने पर,

$$\frac{g'}{g} = \frac{R_e^2}{(R_e + h)^2} = \frac{R_e^2}{R_e^2\left(1 + \frac{h}{R_e}\right)^2}$$

अथवा $$g' = \frac{g}{\left(1 + \frac{h}{R_e}\right)^2} \qquad ...(3)$$



चित्र-3

समीकरण (3) से स्पष्ट है कि गुरुत्वीय त्वरण $g' < g$ अर्थात् पृथ्वी तल से ऊपर जाने पर h के बढ़ने के साथ-साथ गुरुत्वीय त्वरण का मान घटता जाता है तथा अनन्त पर $h = \infty$ के लिए यह शून्य हो जायेगा।

समीकरण (3) की सहायता से पृथ्वी तल से किसी भी ऊँचाई पर गुरुत्वीय त्वरण का मान g' परिकलित किया जा सकता है।

उदाहरणार्थ– पृथ्वी तल से पृथ्वी की त्रिज्या (R_e = 6400 किमी) के बराबर ऊँचाई पर अर्थात् $h = R_e$ पर गुरुत्वीय त्वरण का मान

$$g' = \frac{g}{\left(1 + \frac{R_e}{R_e}\right)^2} = \frac{g}{4}$$

स्पष्ट है कि 6400 किमी ऊँचाई पर गुरुत्वीय त्वरण एक-चौथाई रह जाता है। चन्द्रमा की पृथ्वी से दूरी h लगभग 3.8×10^5 किमी अर्थात् $60\ R_e$ के बराबर है। अत: चन्द्रमा की ऊँचाई पर गुरुत्वीय त्वरण पृथ्वी तल पर गुरुत्वीय त्वरण का केवल (1/3600) रह जायेगा।

प्रश्न 5. पृथ्वी तल से गहराई के साथ गुरुत्वीय त्वरण (g) के मान में होने वाले परिवर्तन की विवेचना कीजिए।

उत्तर– "पृथ्वी तल से नीचे जाने पर गहराई में वृद्धि के साथ-साथ भी गुरुत्वीय त्वरण का मान घटता जाता है।" इस तथ्य को निम्न प्रकार से समझा जा सकता है–

माना m द्रव्यमान की कोई वस्तु पृथ्वी के अन्दर इसकी सतह से h गहराई पर स्थित बिन्दु P पर रखी है (चित्र-4) जिसकी पृथ्वी के केन्द्र O से दूरी $(R_e - h)$ होगी

इस अवस्था में यदि O को केन्द्र मानकर एक गोला खींचा जाये जिसकी त्रिज्या $(R_e - h)$ हो तो वस्तु अन्दर वाले ठोस गोले के तल पर स्थित होगी तथा बाहरी कवच के अन्दर होगी। परन्तु किसी भी खोखले गोले के कवच के भीतर स्थित वस्तु पर आकर्षण बल शून्य होता है, अत: केवल अन्दर वाले ठोस गोले के कारण ही वस्तु पर आकर्षण बल कार्य करेगा। अन्दर वाले ठोस गोले का द्रव्यमान, $M_e' = (R_e - h)$ त्रिज्या के गोले का आयतन × पृथ्वी का माध्य घनत्व

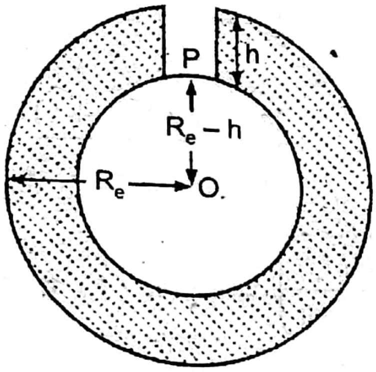
$$= \frac{4}{3}\pi(R_e - h)^2 \times \rho$$

अत: न्यूटन के गुरुत्वाकर्षण नियम के अनुसार, अन्दर वाले गोले के कारण वस्तु पर आकर्षण बल

$$F = \frac{GM'_e m}{(R_e - h)^2}$$

$$= G \times \frac{4\pi}{3} \frac{(R_e - h)^3 \times \rho m}{(R_e - h)^2}$$

$$= \frac{4}{3}\pi G(R_e - h) \times \rho m$$



चित्र-4.

यह बल वस्तु के mg' के बराबर होना चाहिए जहाँ g' पृथ्वी तल से h गहराई पर स्थित बिन्दु पर गुरुत्वीय त्वरण है।

अत: $$mg' = \frac{4}{3}\pi G(R_e - h)\rho m \quad ...(1)$$

अब, यदि m द्रव्यमान की यह वस्तु पृथ्वी के तल पर स्थित हो जहाँ गुरुत्वीय त्वरण g हो तो समीकरण (1) में $h = 0$ तथा $g' = g$ रखने पर–

$$mg = \frac{4}{3}\pi G(R_e)\rho m$$

समीकरण (1) को समीकरण (2) से भाग देने पर,

$$\frac{g'}{g} = \left(\frac{R_e - h}{R_e}\right)$$

अथवा $$g' = g\left(1 - \frac{h}{R_e}\right) \quad ...(3)$$

अत: स्पष्ट है कि $g' < g$

जैसे-जैसे हम पृथ्वी तल से नीचे की ओर जाते हैं h में वृद्धि के साथ-साथ गुरुत्वीय त्वरण g का मान घटता जाता है तथा पृथ्वी के केन्द्र O पर (जहाँ $h = R_e$) इसका मान शून्य हो जाता है।

प्रश्न 6. निम्नलिखित पर संक्षिप्त टिप्पणी लिखिए–

(i) गुरुत्वीय विभव (Gravitational potential)

(ii) गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा (Gravitational potential energy)

उत्तर– (i) गुरुत्वीय विभव (Gravitational potential)– किसी पिण्ड को गुरुत्वीय क्षेत्र में दूर ले जाया जाये तो पिण्ड पर लगने वाले गुरुत्वाकर्षण बल के विरुद्ध कर्ता को कार्य करना पड़ता है।

यदि पिण्ड को गुरुत्वीय क्षेत्र में अन्दर की ओर लाया जाये तो स्वयं गुरुत्वीय क्षेत्र पिण्ड पर कार्य करता है। गुरुत्वीय क्षेत्र के किसी बिन्दु पर गुरुत्वीय विभव को इस प्राप्त कार्य के आधार पर इस प्रकार परिभाषित किया जाता है–

"गुरुत्वीय क्षेत्र के किसी बिन्दु पर गुरुत्वीय विभव उस कार्य के बराबर होता है जो एकांक द्रव्यमान को अनन्त से उस बिन्दु तक लाने में प्राप्त होता है।"

यदि m किग्रा द्रव्यमान के किसी पिण्ड को अनन्त से किसी गुरुत्वीय क्षेत्र के अन्तर्गत किसी बिन्दु तक लाने में W जूल कार्य प्राप्त हो तो उपर्युक्त परिभाषा के अनुसार उस बिन्दु पर गुरुत्वीय विभव

$$V = \left(\frac{\text{प्राप्त कार्य}}{\text{द्रव्यमान}}\right)$$

अर्थात् $$V = \frac{\text{जूल}}{\text{किग्रा}}$$

चूँकि प्राप्त कार्य सदैव ऋणात्मक होता है, अत: W के ऋणात्मक होने के कारण गुरुत्वीय विभव V सदैव ऋणात्मक होता है। गुरुत्वीय विभव एक अदिश राशि है।

$$\text{इसका विमीय सूत्र} = \frac{\text{कार्य का विमीय सूत्र}}{\text{द्रव्यमान का विमीय सूत्र}}$$

$$= \frac{[ML^2T^{-2}]}{[M]} = [L^2\,T^{-2}]$$

(ii) गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा (Gravitational potential energy)– गुरुत्वीय क्षेत्र में स्थित प्रत्येक वस्तु पर गुरुत्वाकर्षण बल लगता है। यदि हम गुरुत्वीय क्षेत्र से किसी वस्तु को बाहर ले जायें तो हमें गुरुत्वाकर्षण बल के विरुद्ध कार्य करना होगा। इसके विपरीत, यदि हम वस्तु को बाहर से गुरुत्वीय क्षेत्र के अन्दर लायें तो स्वयं गुरुत्वीय क्षेत्र उस वस्तु पर कार्य करेगा तथा यह कार्य ही वस्तु में स्थितिज ऊर्जा के रूप में संचित हो जाता है। **इस प्रकार गुरुत्वीय क्षेत्र में स्थित किसी वस्तु में उसकी स्थिति के कारण संचित (stored) ऊर्जा वस्तु की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा कहलाती है।**

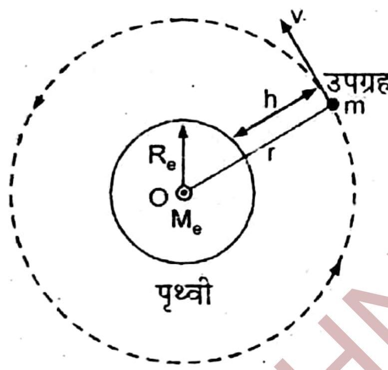
अन्य शब्दों में, इसको निम्न प्रकार परिभाषित कर सकते हैं–

"किसी वस्तु को अनन्त से गुरुत्वीय क्षेत्र के अन्दर किसी बिन्दु तक लाने में जितना कार्य प्राप्त होता है, उसे उस बिन्दु पर वस्तु की "गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा" कहते हैं। अनन्त पर गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा शून्य मानी जाती है।"

चूँकि गुरुत्वीय बल आकर्षण बल है, इसलिए अनन्त से किसी वस्तु को गुरुत्वीय क्षेत्र के भीतर लाने में कार्य करना नहीं पड़ता बल्कि कार्य प्राप्त होता है। अतः गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा सदैव ऋणात्मक होती है। इसे U से व्यक्त करते हैं। गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा का मात्रक जूल है तथा यह अदिश राशि है।

प्रश्न 7. उपग्रह की कक्षीय चाल के लिए सूत्र का व्युत्क्रम कीजिये।

उत्तर– उपग्रह की कक्षीय चाल– माना m द्रव्यमान का कोई उपग्रह पृथ्वी के चारों ओर r त्रिज्या की वृत्ताकार कक्षा में u_0 कक्षीय चाल से परिक्रमण कर रहा है। (चित्र-5)।



चित्र-5.

इस चित्र में O पृथ्वी का केन्द्र है जहाँ पर पृथ्वी का सम्पूर्ण द्रव्यमान M_e केन्द्रित माना जा सकता है। R_e पृथ्वी की त्रिज्या है।

उपग्रह को वृत्ताकार कक्षा में घूमने के लिए आवश्यक अभिकेन्द्र बल, पृथ्वी (ग्रह) तथा उपग्रह के बीच लगने वाले गुरुत्वाकर्षण बल से प्राप्त होता है।

अतः उपग्रह पर अभिकेन्द्र बल = पृथ्वी तथा उपग्रह के बीच पारस्परिक गुरुत्वाकर्षण बल

$$\frac{mv_0^2}{r} = G\left(\frac{M_e m}{r^2}\right)$$

अथवा $$v_0^2 = \frac{GM_e}{r}$$

अथवा $$v_0 = 2\pi\sqrt{\left[\frac{(R_e+h)^3}{GM_e}\right]} \quad ...(1)$$

परन्तु, उपग्रह की कक्षा की त्रिज्या

r = पृथ्वी के केन्द्र से उपग्रह की दूरी

= पृथ्वी की त्रिज्या + पृथ्वी तल से उपग्रह की ऊँचाई

$$= \frac{2\pi r}{v_0} = \frac{2\pi(R_e+h)}{v_0} \quad ...(1)$$

$v_0 = \sqrt{\left(\frac{GM_e}{R_e+h}\right)}$ समीकरण (1) में रखने पर

$$T = \frac{2\pi(R_e+h)}{\{GM_e/(R_e+h)\}^{1/2}}$$

$= (R_e + h)$

r का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$v_0 = \sqrt{\left[\frac{GM_e}{(R_e+h)}\right]} \quad ...(2)$$

परन्तु पृथ्वी तल पर गुरुत्वीय त्वरण $g = \frac{GM_e}{R_e^2}$

अतः $GM_e = gR_e^2$

GM_e का यह मान समीकरण (2) में रखने पर,

$$v_0 = \sqrt{\left(\frac{gR_e^2}{(R_e+h)}\right)}$$

अथवा $$v_0 = R_e\sqrt{\left(\frac{g}{(R_e+h)}\right)} \quad ...(3)$$

समीकरण (1), (2) व (3) उपग्रह की कक्षीय चाल (v_0) के लिए विभिन्न सूत्र हैं।

उपग्रहों की कक्षीय चाल के सम्बन्ध में महत्त्वपूर्ण निष्कर्ष– (*i*) चूँकि उपग्रह की कक्षीय चाल के उपर्युक्त सूत्रों में उपग्रह का द्रव्यमान m नहीं आ रहा है, अतः **उपग्रह की कक्षीय चाल उसके द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करती।** इसलिए यदि अलग-अलग द्रव्यमान के दो उपग्रह पृथ्वी के चारों ओर एक ही वृत्ताकार कक्षा में चक्कर लगायें तो उनकी चाल एक ही होगी।

(*ii*) समीकरण (1) से कक्षीय चाल $v_0 \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$

तथा $r = R_e + h$

अर्थात् $v_0 \propto 1/(R_e + h)$ जो समीकरण (2) व (3) से भी स्पष्ट है; अतः उपग्रह की कक्षीय चाल उसकी पृथ्वी तल से ऊँचाई h पर निर्भर करती है तथा h का मान जितना अधिक होगा, कक्षीय चाल उतनी ही कम होगी।

प्रश्न 8. उपग्रह के परिक्रमण काल से आप क्या समझते हैं? (2016)

उत्तर– परिक्रमण काल (Period of Satellite)– उपग्रह का परिक्रमण काल T = उपग्रह द्वारा ग्रह के चारों ओर एक चक्कर लगाने में लिया गया समय

$$= \frac{\text{उपग्रह द्वारा एक चक्कर में तय की गयी दूरी}}{\text{उपग्रह की कक्षीय चाल}}$$

$$= \frac{2\pi r}{v_0} = \frac{2\pi(R_e + h)}{V_0} \quad \ldots(1)$$

$$v_0 = \sqrt{\left(\frac{Gm_e}{R_e + h}\right)} \text{ समीकरण (1) में रखने पर–}$$

$$+ = \frac{2\pi(R_e + h)}{\{Gm_e((R_e + h)\}\frac{1}{2}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\left[\frac{(R_e + h)^3}{GM_e}\right]} \quad \ldots(2)$$

परन्तु $GM_e = gR_e^2$

$$\therefore \quad T = 2\pi\sqrt{\left[\frac{(R_e + h)^3}{gR_e^2}\right]} \quad \ldots(3)$$

समीकरण (2) व (3) उपग्रह के परिक्रमण काल के लिए विभिन्न सूत्र हैं।

प्रश्न 9. उपग्रह की कुल ऊर्जा तथा बन्धन ऊर्जा को विस्तारपूर्वक समझाइये।

उत्तर– उपग्रह की कुल ऊर्जा तथा बन्धन ऊर्जा (Total energy and binding energy of a satellite)– पृथ्वी के चारों ओर परिक्रमा करता हुआ उपग्रह पृथ्वी के गुरूत्वीय क्षेत्र में रहता है, इसलिए उपग्रह में स्थितिज ऊर्जा होती है तथा उपग्रह की गति के कारण इसमें गतिज ऊर्जा भी होती है। इस प्रकार पृथ्वी के चारों ओर परिक्रमा करते हुए उपग्रह की स्थितिज एवं गतिज ऊर्जाओं का योग ही इसकी कुल ऊर्जा होती है।

अनन्त पर किसी पिण्ड की गुरूत्वीय स्थितिज ऊर्जा शून्य मानते हुए पृथ्वी तल पर स्थित m द्रव्यमान के पिण्ड की गुरूत्वीय स्थितिज ऊर्जा निम्नलिखित सूत्र से व्यक्त की जाती है–

$$U_e = -\left(\frac{GM_e m}{R_e}\right)$$

जहाँ M_e = पृथ्वी का द्रव्यमान तथा R_e = पृथ्वी की त्रिज्या

यदि कोई कृत्रिम उपग्रह पृथ्वी तल के समीप ही पृथ्वी की परिक्रमा वृत्तीय कक्षा में कर रहा हो तो उसकी कक्षीय त्रिज्या r को R_e के बराबर मान सकते हैं। तब यदि उपग्रह का द्रव्यमान m हो तो उसकी गुरूत्वीय स्थितिज ऊर्जा $U = U_e$ ही होगी।

$$\therefore \quad U = -\left(\frac{GM_e m}{R_e}\right) \quad \ldots(1)$$

यदि उपग्रह की कक्षीय चाल v_0 हो तो

उपग्रह की गतिज ऊर्जा $K = \frac{1}{2}mv_0^2$

परन्तु $v_0 = \sqrt{\left(\frac{GM_e}{r}\right)} = \sqrt{\left(\frac{GM_e}{R_e}\right)}$

($r = R_e$ लेते हुए)

∴ उपग्रह की गतिज ऊर्जा

$$K = \frac{1}{2}m \times \left[\sqrt{\left(\frac{GM_e}{R_e}\right)}\right]^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{GM_e m}{R_e}\right) \quad \ldots(2)$$

∴ उपग्रह की कुल ऊर्जा $E = U + K$

$$= -\left(\frac{GM_e m}{R_e}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{GM_e m}{R_e}\right)$$

या $$E = -\frac{1}{2}\left(\frac{GM_e m}{R_e}\right) \quad \ldots(3)$$

उपग्रह की कुल ऊर्जा के सूत्र में ऋणात्मक चिन्ह इस तथ्य का प्रतीक है कि उपग्रह की कुल ऊर्जा ऋणात्मक है। इसका एक विशेष अर्थ है। अनन्त पर ($r = \infty$) उपग्रह की गतिज ऊर्जा व स्थितिज ऊर्जा दोनों ही शून्य हैं; अतः अनन्त

पर उपग्रह की कुल ऊर्जा शून्य है। परन्तु गतिज ऊर्जा ऋणात्मक नहीं हो सकती। **तब कुल ऊर्जा ऋणात्मक होने का अर्थ है उपग्रह को अनन्त पर भेजने के लिए अर्थात् कुल ऊर्जा शून्य करने के लिए हमें उपग्रह को ऊर्जा देनी पड़ेगी।** जब तक परिक्रमण करते उपग्रह को अतिरिक्त ऊर्जा प्राप्त नहीं होगी तब तक वह अपनी कक्षा नहीं छोड़गा अर्थात् बन्द कक्षा में ही परिक्रमण करता रहेगा, अर्थात् उपग्रह पृथ्वी से बद्ध (bound) रहेगा।

उपग्रह की बन्धन ऊर्जा की परिकल्पना (Concept of binding Energy of a Satellite)– "पृथ्वी के चारों ओर परिक्रमण करते हुए किसी पिण्ड अथवा उपग्रह को अपनी कक्षा छोड़कर अनन्त पर चले जाने के लिए आवश्यक ऊर्जा को **बन्धन ऊर्जा** कहते हैं।"

पृथ्वी के समीप परिक्रमण करते हुए उपग्रह की कुल ऊर्जा $-\frac{1}{2}\left(\frac{GM_e m}{R_e}\right)$ होती है। अतः उपग्रह को अनन्त पर भेजने के लिए उपग्रह को $+\frac{1}{2}\left(\frac{GM_e m}{R_e}\right)$ ऊर्जा देनी होगी जिससे उसकी कुल ऊर्जा E शून्य हो जायेगी।

अतः पृथ्वी के समीप परिक्रमण करते उपग्रह की बन्धन ऊर्जा

$$= +\frac{1}{2}\left(\frac{G M_e m}{R_e}\right)$$

विशेष– यदि कोई उपग्रह पृथ्वी तल से काफी ऊँचाई पर r त्रिज्या की कक्षा में परिक्रमण करे तो उपग्रह की स्थितिज ऊर्जा $U = -\left(\frac{G M_e m}{r}\right)$ तथा गतिज ऊर्जा K

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{G M_e m}{r}\right)$$

तथा कुल ऊर्जा $E = U + K = +\frac{1}{2}\left(\frac{G M_e m}{r}\right)$

इस दशा में, उपग्रह की बन्धन ऊर्जा $= \frac{1}{2}\left(\frac{G M_e m}{r}\right)$

प्रश्न 10. पलायन वेग एवं पलायन ऊर्जा को समझाते हुए पलायन वेग सम्बन्धी सूत्र का व्युत्क्रम करें तथा पृथ्वी तल से पिण्ड के पलायन वेग का परिमाण बताइये।

(2010, 2014)

उत्तर– यदि किसी वस्तु को पृथ्वी तल से ऊपर की ओर फेंका जाये तो वह कुछ ऊँचाई तक जाकर पृथ्वी के गुरुत्वाकर्षण के कारण फिर पृथ्वी पर वापस लौट आती है। किसी वस्तु को जितने अधिक प्रारम्भिक वेग से ऊपर की ओर फेंका जाता है, वह उतनी ही अधिक ऊँचाई तक जाकर वापस लौटती है। स्पष्ट है कि वस्तु का प्रारम्भिक वेग बढ़ाते रहने पर एक ऐसा वेग भी होगा कि यदि हम वस्तु को उस वेग से फेंके तो वह पृथ्वी के आकर्षण क्षेत्र से बाहर निकल जाये। इस दिशा में वह लौटकर पृथ्वी पर वापस कभी नहीं आयेगी। अतः **वह न्यूनतम वेग जिससे किसी वस्तु को पृथ्वी तल से फेंकने पर वह पृथ्वी के आकर्षण क्षेत्र से बाहर निकल जाये अर्थात् वापस लौटकर पृथ्वी पर न आ सके, पलायन वेग कहलाता है।** इसे v_e से व्यक्त करते हैं।

वस्तु को पृथ्वी तल से पलायन वेग से फेंकने के लिए उसकी दी गयी गतिज ऊर्जा को वस्तु की पलायन ऊर्जा कहते हैं। हम यह जान चुके हैं कि अनन्त पर गुरूत्वीय स्थितिज ऊर्जा शून्य मानने पर, पृथ्वी तल पर स्थित m द्रव्यमान के पिण्ड की गुरूत्वीय स्थितिज ऊर्जा

$$U = -\left(\frac{G M_e m}{R_e}\right)$$

जहाँ M_e पृथ्वी का द्रव्यमान तथा R_e पृथ्वी की त्रिज्या है।

अतः m द्रव्यमान के पिण्ड को पृथ्वी तल से अनन्त तक ले जाने के लिए $GM_e m/R_e$ कार्य करना पड़ता है। अतः यदि m द्रव्यमान के पिण्ड को इतने वेग से फेंकें कि उसकी गतिज ऊर्जा, कार्य $GM_e m/R_e$ के बराबर हो तो वह पृथ्वी के गुरूत्वीय क्षेत्र के बाहर चला जायेगा अर्थात् अनन्त पर चला जायेगा अर्थात् पृथ्वी से सदैव के लिए पलायन कर जायेगा।

$$\text{अतः पलायन ऊर्जा} = +\left(\frac{GM_e m}{R_e}\right) \quad ...(1)$$

इस दिशा में पिण्ड को दिया गया वेग ही पिण्ड का पलायन वेग v_e होगा।

अतः पिण्ड की गतिज ऊर्जा $\frac{1}{2}mv_e^2$ होगी

$$\therefore \quad \frac{1}{2}mv_e^2 = \frac{GM_e m}{R_e}$$

$$\text{अथवा} \quad v_e = \sqrt{\left(\frac{2GM_e}{R_e}\right)} \quad ...(2)$$

परन्तु, पृथ्वी तल पर गुरूत्वीय त्वरण, $g = \dfrac{GM_e}{R_e^2}$

अथवा $GM_e = gR_e^2$

यह मान समीकरण (2) में रखने पर,

$$v_e = \sqrt{\left(\frac{2gR_e^2}{R_e}\right)}$$

अथवा पलायन वेग

$$v_e = \sqrt{2gR_e} \qquad ...(3)$$

समीकरण (2) तथा (3) पृथ्वी तल से किसी पिण्ड के पलायन वेग के लिए अभीष्ट सूत्र के दो विभिन्न रूप हैं।

चूँकि इन सूत्रों में पिण्ड का द्रव्यमान m तथा प्रक्षेपण कोण θ नहीं आता है, अतः पलायन वेग v_e का मान फेंके गये पिण्ड के द्रव्यमान तथा प्रक्षेपण कोण पर निर्भर नहीं करता। अतः **पृथ्वी पर प्रत्येक पिण्ड के लिए पलायन वेग का मान एक ही होता है चाहे उसका द्रव्यमान कुछ भी हो और वह क्षैतिज के साथ किसी भी कोण पर प्रक्षेपित किया जाये।**

समीकरण (3) से स्पष्ट है कि पलायन वेग का मान पृथ्वी के तल पर गुरुत्वीय त्वरण g तथा पृथ्वी की त्रिज्या R_e पर निर्भर करता है। अतः पृथ्वी के अतिरिक्त अन्य किसी ग्रह आदि से प्रक्षेपित पिण्डों के लिए पलायन वेग के सूत्र में उस ग्रह पर गुरूत्वीय त्वरण तथा उसकी त्रिज्या आयेगी, जो प्रत्येक के लिए भिन्न होगी। अतः विभिन्न ग्रहों से प्रक्षेपित पिण्डों के लिए पलायन वेग के मान भी भिन्न-भिन्न होंगे।

पृथ्वी तल से पिण्ड के पलायन वेग का परिमाण– पृथ्वी तल पर गुरूत्वीय त्वरण g = 9.8 मी/से तथा पृथ्वी की त्रिज्या $R_e = 6.4 \times 10^6$ मीटर, अतः ये मान पलायन वेग के सूत्र $v_e = \sqrt{2gR_e}$ में रखने पर,

$$v_e = \sqrt{(2 \times 9.8 \times 6.4 \times 10^6)}$$

$$= 11.2 \times 10^3 \text{ मी/से}$$

$$= 11.2 \text{ किमी/सेकण्ड}$$

प्रश्न 11. भू-स्थिर अथवा भू-तुल्यकाली उपग्रह की विवेचना कीजिये। (2012)

उत्तर– भू-स्थिर अथवा भू-तुल्यकाली उपग्रह (Geo-stationary satellite)– यदि किसी कृत्रिम उपग्रह की पृथ्वी तल से ऊँचाई इतनी हो कि उसका परिक्रमण काल ठीक पृथ्वी की अपनी अक्ष के परितः गति के परिक्रमण काल (24 घण्टे) के बराबर हो तथा उसकी वृत्ताकार कक्षा का तल **विषुवत्-रेखीय तल** (equatorial plane) में हो तो वह उपग्रह पृथ्वी के सापेक्ष स्थिर दिखायी देता है। ऐसे उपग्रहों को **भूस्थिर उपग्रह** (geostationary satellite) अथवा **भू-तुल्यकाली उपग्रह** (synchronous satellite) कहते हैं। इस प्रकार का उपग्रह किसी निश्चित स्थान के सापेक्ष स्थिर रहते हुए वहाँ के चित्र पृथ्वी पर भेज सकता है। इनसे दूरदर्शन संकेतों (T.V. signals) को परिवर्तित करके दूरदर्शन के कार्यक्रमों को अति दूर स्थित दूरदर्शन सेटों पर दिखाया जाता है। इसलिए ऐसे उपग्रहों को **संचार उपग्रह** भी कहते हैं। यह कृत्रिम उपग्रहों का एक बहुत महत्वपूर्ण उपयोग है। विषुवत्-रेखीय तल में न घूमने वाला उपग्रह कभी भी भूस्थिर नहीं हो सकता। इसका कारण यह है कि इस अवस्था में उपग्रह के ऊर्ध्वाधर नीचे स्थित पृथ्वी का भाग पृथ्वी के केन्द्र के परितः नहीं घूमता जबकि प्रत्येक उपग्रह की कक्षा का केन्द्र सदैव पृथ्वी का केन्द्र ही होता है। अतः इस अवस्था में उपग्रह तथा उसके नीचे स्थित पृथ्वी का भाग अलग-अलग केन्द्र वाले वृत्तीय पथों पर चलते हैं। इसलिए उनके कोणीय वेग यदि समान भी हों तब भी उनमें सापेक्ष कोणीय गति होगी।

अतः यदि कोई कृत्रिम उपग्रह पृथ्वी का एक चक्कर 24 घण्टे में लगाता है जिससे वह पृथ्वी के सापेक्ष एक ही स्थान पर स्थिर प्रतीत होता है तो उसे भू-स्थिर उपग्रह या भू-तुल्यकाली उपग्रह कहते हैं तथा इसकी कक्षा को पार्क कक्षा (parking orbit) कहते हैं।

भारतीय उपग्रह INSAT-1B एक भू-स्थिर उपग्रह है। इन उपग्रहों का उपयोग रेडियो एवं दूरदर्शन संकेतों के संचारण में किया जाता है।

प्रश्न 12. उपग्रह के प्रकारों का वर्णन कीजिए।

उत्तर– उपग्रह के प्रकार (Types of satellites)

(i) खगोलीय उपग्रह (Astronomical satellite)– ऐसे उपग्रह जिनका प्रयोग दूर के ग्रहों के प्रेक्षण के लिए, आकाशगंगाओं और अन्य बाहरी अन्तरिक्ष पिण्डों के लिए किया जाता है।

(ii) जैवीय उपग्रह (Biosatellite)– ये ऐसे उपग्रह हैं जो आम तौर पर वैज्ञानिक प्रयोगों के लिए जीवित अवयवों को ले जाने के लिए प्रयोग किये जाते हैं।

(iii) टिथर उपग्रह (Tether satellite)– ये ऐसे उपग्रह हैं जो खुद एक दूसरे उपग्रह से पतले तार द्वारा जुड़े होते हैं, टिथर उपग्रह कहलाते हैं।

(iv) मौसम उपग्रह (Weather satellite)– यह उपग्रह मुख्य रूप से पृथ्वी के मौसम और जलवायु की निगरानी रखने के लिए उपयोग किया जाता है।

(v) अंतरिक्ष स्टेशन (Space station)– मानव द्वारा डिजाइन की गई संरचना है जो बाहरी अंतरिक्ष में और उसके बाहर रहने वाले मानव के लिए है।

(vi) आवीक्षण उपग्रह (Reconnaissance satellite)– यह उपग्रह, सैन्य या खुफिया कार्यों के लिए तैनात किये जाते हैं।

(vii) पृथ्वी अवलोकन उपग्रह (earth observation satellite)– यह उपग्रह गैर सैन्य जैसे पर्यावरण, मौसम विज्ञान, नक्शा बनाने आदि में उपयोगी होता है।

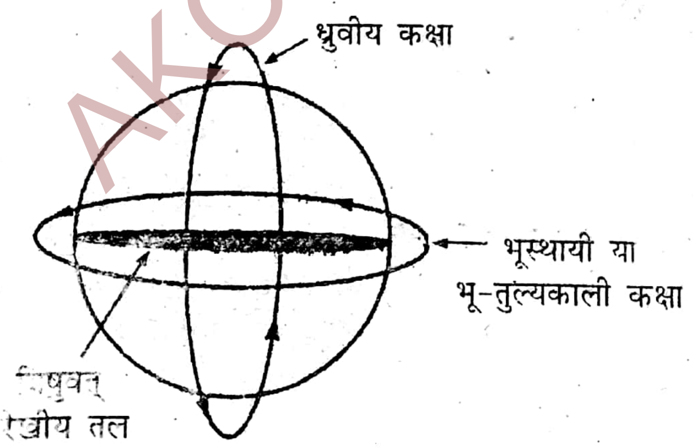
(viii) संचार उपग्रह (communications satellite)– ऐसे उपग्रह हैं जिन्हें अन्तरिक्ष में दूरसंचार के प्रयोजन के लिए तैनात किया जाता है। आधुनिक संचार उपग्रह आमतौर पर गर्भयोजित कक्षाओं, मोलनिया कक्षाओं या पृथ्वी की निचली कक्षाओं का प्रयोग करते हैं।

(ix) उपग्रह विरोधी हथियार या किलर उपग्रह (Anti satellite weapons/ killer satellites)– यह ऐसा सशस्त्र उपग्रह है जो कि दुश्मन युद्ध ग्रहों, उपग्रहों और अन्य अंतरिक्ष पूंजियों को खोज निकालने के लिए डिजाइन किये गये हैं।

प्रश्न 13 ध्रुवीय उपग्रह पर संक्षिप्त टिप्पणी कीजिए एवं इसके उपयोग लिखिए। **(2016)**

उत्तर– ध्रुवीय उपग्रह (Polar satellite)– भू-स्थिर उपग्रह पृथ्वी तल से लगभग 36,000 किमी की ऊँचाई पर होते हैं और मुख्यतः संचार के लिए प्रयोग किये जाते हैं।

ये भूमध्यरेखीय (equatorial) तल में परिक्रमण करते हैं (चित्र-6)।



चित्र-6.

पृथ्वी के उत्तरी और दक्षिणी ध्रुव से गुजरने वाले तल को ध्रुवीय तल कहते हैं। इस तल में कम ऊँचाई पर परिक्रमण करने वाले उपग्रह को ध्रुवीय उपग्रह कहते हैं और इसकी कक्षा को ध्रुवीय कक्षा कहते हैं। इन उपग्रहों को संचार के लिए प्रयुक्त नहीं किया जाता है। इनका उपयोग **दूर-संवेदन** (remote sensing) के लिए किया जाता है। इसलिए इन्हें **दूर-संवेदी उपग्रह** (remote sensing satellite) कहते हैं।

ध्रुवीय उपग्रहों की पृथ्वी तल से ऊँचाई 500 किमी से 800 किमी तक होती है। इनका परिक्रमण काल लगभग 100 मिनट होता है। एक ध्रुवीय उपग्रह पृथ्वी पर किसी स्थिति से एक दिन में कई बार गुजरता है। ध्रुवीय उपग्रह में सेट किया गया कैमरा सम्पूर्ण पृथ्वी का फोटोग्राफ ले सकता हैं।

उपयोग (Uses)– इसके उपयोग निम्नलिखित हैं।

(i) बादलों के फोटोग्राफ लेने में।

(ii) वायुमण्डलीय सूचनायें प्राप्त करने में।

(iii) वायुमण्डल में ओजोन परत के विषय में सूचनायें प्राप्त करने में।

(iv) ओजोन परत छिद्रों के संसूचन में।

प्रश्न 14 पृथ्वी के निकट परिक्रमा कर रहे उपग्रह के कक्षीय वेग तथ पलायन वेग में सम्बन्ध स्थापित कीजिये।

उत्तर– कक्षीय वेग तथा पलायन वेग में सम्बन्ध– पृथ्वी के निकट परिक्रमा कर रहे उपग्रह का कक्षीय वेग–

$$v_0 = \sqrt{gR_e} \qquad ...(1)$$

पृथ्वी तल से किसी पिण्ड का पलायन वेग–

$$v_e = \sqrt{2gR_e} \qquad ....(2)$$

समीकरण (1) को समीकरण (2) से भाग देने पर,

$$\frac{v_0}{v_e} = \frac{\sqrt{gR_e}}{\sqrt{2gR_e}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$v_e = \sqrt{2}v_0 \qquad ...(3)$$

समीकरण (3) का अभिप्राय यह है कि पृथ्वी तल के निकट पृथ्वी की परिक्रमा कर रहे उपग्रह की कक्षीय चाल यदि किसी कारणवश अपने मान की $\sqrt{2}$ अर्थात् 1.41 गुनी हो जाये अर्थात् उसके मान में 41% की वृद्धि हो जाये तो वह उपग्रह अपनी कक्षा को छोड़कर पलायन कर जायेगा।

प्रश्न 15 ब्लैक होल क्या है? इसके प्रकारों का उल्लेख कीजिये।

उत्तर– ब्लैक होल (Black Holes)– नाभिकीय संलयन से निकली हुई प्रचण्ड ऊष्मा के कारण ही तारा गुरूत्वाकर्ष संतुलन में रहता है, इसलिए जब तारों में मौजूद हाइड्रोजन खत्म हो जाती है तो वह तारा धीरे-धीरे ठंडा होने लग जाता है फिर अपने ही ईंधन को समाप्त कर चुके सौर्य द्रव्यमान से 1.4 गुना द्रव्यमान वाले तारे जो अपने ही गुरुत्वाकर्षण के विरूद्ध खुद को नहीं संभाल पाते, तो ऐसी स्थिति में इन तारों के अन्दर एक विस्फोट होता है जिसको हम सुपरनोवा या महानोवा कहते है। इस विस्फोट के बाद यदि उस तारे का कोई घनत्व वाला अवशेष बचता है तो वह बहुत भयंकर घनत्व युक्त न्यूट्रान तारा बना जाता है। और ऐसे तारों में अपार गुरुत्वीय खिंचाव होने के कारण तारा संकुचित होने लगता है और वह संकुचित होते-होते अन्त में एक निश्चित क्रान्तिक सीमा तक संकुचित हो जाता है और इस अपार असाधारण संकुचन के कारण उसका space और Time भी विकृत हो जाता है और अपने में ही space और टाइम का अस्तित्व मिट जाने के कारण वह अदृश्य हो जाता है और यही वह अदृश्य पिण्ड होते है जिनको हम ब्लैक होल कहते हैं।

ब्लैक होल के प्रकार (Types of black holes)– इस ब्राहाण्ड में कई तरह के ब्लैक होल हो सकते हैं लेकिन अभी तक वैज्ञानिक मुख्य रूप से तीन प्रकार के ही ब्लैक होल्स का पता लगा सके हैं–

(1) Stellar mass black hole
(2) Supermassive black hole
(3) Primordial black hole

प्रश्न 16. पृथ्वी सतह से 6400 किमी॰ की ऊँचाई पर स्थित बिन्दु पर गुरूत्वीय क्षेत्र की तीव्रता एवं गुरूत्वीय विभव की गणना कीजिए। (पृथ्वी की त्रिज्या $R_e = 6.4 \times 10^6$ मीटर, पृथ्वी की सतह पर गुरूत्वीय त्वरण g = 10 मी॰/से॰^{2})

उत्तर– पृथ्वी के केन्द्र से प्रक्षेपण बिन्दु की दूरी–

$$= (R_e + h)$$
$$= (6.4 \times 10^6 + 6400 \times 10^3) \text{ मीटर}$$
$$= 12.8 \times 10^6 \text{ मीटर}$$

∴ गुरूत्वीय क्षेत्र की तीव्रता

$$I_G = \frac{GM_e}{r^2} = \frac{gR_e^2}{r} = g\left(\frac{R_e}{r}\right)^2$$

$$= (10 \text{ मी/ से}^2)\left[\frac{6.4 \times 10^6 \text{ मीटर}}{12.8 \times 10^6 \text{ मीटर}}\right]^2$$

$$= 2.5 \text{ न्यूटन/किग्रा}$$

अत: गुरुत्वीय विभव (v)

$$VG = -\left(\frac{GMe}{r}\right) = -\left(\frac{gRe^2}{r}\right)$$

$$= -\left[\frac{10 \text{ मी/से}^2 (6.4 \times 10^6 \text{ मीटर})^2}{12.8 \times 10^6 \text{ मीटर}}\right]$$

$$= -3.2 \times 10^7 \text{ जूल/किग्रा॰}$$

प्रश्न 17. यदि पृथ्वी का द्रव्यमान 6×10^{24} किग्रा हो तो पृथ्वी के केन्द्र से 3.35×10^{10} मीटर की दूरी पर (*i*) 33.5 किग्रा की वस्तु की स्थितिज ऊर्जा तथा (*ii*) गुरुत्वीय विभव का चिन्ह सहित मान ज्ञात कीजिये। (G = 6.7×10^{-11} न्यूटन-मी^{2}/किग्रा^{2})।

उत्तर– (*i*) गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा $U = -GM_e m/r$

जहाँ $r = 3.35 \times 10^{10}$ मीटर;

$M_e = 6.0 \times 10^{-24}$ किग्रा,

$m = 33.5$ किग्रा तथा

$G = 6.7 \times 10^{-11}$ न्यूटन-मीटर^2/किग्रा^{2}

$$\therefore U = -\left(\frac{(6.7 \times 10^{-11})(6.0 \times 10^{24})(33.5)}{3.35 \times 10^{10}}\right) \text{ जूल}$$

$$= -4.02 \times 10^5 \text{ जूल}$$

(*ii*) गुरूत्वीय विभव,

$$V = -\left(\frac{GM_e}{r}\right)$$

$$= -\left(\frac{(6.7 \times 10^{-11})(6.0 \times 10^{24})}{3.35 \times 10^{10}}\right) \frac{\text{जूल}}{\text{किग्रा}}$$

$$= -12.0 \times 10^3 \text{ जूल/किग्रा}$$

प्रश्न 18. चन्द्रमा पर पलायन वेग की गणना कीजिये यदि यह मान लिया जाये कि चन्द्रमा का गुरुत्वीय त्वरण पृथ्वी के गुरुत्वीय त्वरण का 1/6 है तथा चन्द्रमा की त्रिज्या पृथ्वी की त्रिज्या की 1/4 है। (पृथ्वी की त्रिज्या 6.4×10^6 मीटर तथा गुरुत्वीय त्वरण 9.8 मी/से॰^{2} है)।

उत्तर– चन्द्रमा पर पलायन वेग

$$v_m = \sqrt{2g_m \times R_m}$$

परन्तु चन्द्रमा की त्रिज्या

$$R_m = \frac{R_e}{4},$$

जहाँ $R_e = 6.4 \times 10^6$ मीटर

तथा चन्द्रमा पर गुरूत्वीय त्वरण

$$g_m = \frac{g_e}{6},$$

जहाँ $g_e = 9.8$ मीटर/सेकण्ड^2

$$\therefore \quad v_m = \sqrt{\left(2 \times \frac{g_e}{6} \times \frac{R_e}{4}\right)} = \sqrt{\left[\frac{g_e R_e}{12}\right]}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{9.8 \times 6.4 \times 10^6}{12}\right)} \text{ मी/से}$$

$$= \mathbf{2.286 \times 10^3} \textbf{ मी/से}$$

प्रश्न 18. पृथ्वी का द्रव्यमान 6×10^{24} किग्रा तथा त्रिज्या 6.4×10^6 मीटर है। 5 किग्रा॰ के एक पिण्ड को पृथ्वी तल से अनन्त तक ले जाने में कितना कार्य करना होगा? पिण्ड की पृथ्वी तल पर गुरूत्वीय स्थितिज ऊर्जा कितनी होगी? यदि यह पिण्ड अनन्त से पृथ्वी पर गिरे तो पृथ्वी से टकराते समय इसका वेग कितना होगा? ($G = 6.67 \times 10^{-11}$ न्यूटन-मीटर^2/ किग्रा॰^{2})

उत्तर– $m = 5$ किग्रा॰ के पिण्ड को पृथ्वी तल से अनन्त तक ले जाने में किया गया कार्य

$$W = \left(\frac{GM_e m}{R_e}\right)$$

$$= \left[\frac{(6.67 \times 10^{-11}) \times (6.0 \times 10^{24}) \times 5}{6.4 \times 10^6}\right] \text{ जूल}$$

$$= \mathbf{3.126 \times 10^8} \textbf{ जूल}$$

पृथ्वी तल पर पिण्ड की गुरूत्वीय स्थितिज ऊर्जा

$$U = -\left(\frac{GM_e m}{R_e}\right)$$

$$= -W = \mathbf{-3.126 \times 10^8} \textbf{ जूल}$$

पिण्ड को पृथ्वी से अनन्त तक ले जाने में जो कार्य किया जायेगा वह पिण्ड को अनन्त से पृथ्वी तक गिरने में गतिज ऊर्जा के रूप में प्राप्त हो जायेगा। यदि पृथ्वी से टकराते समय पिण्ड का वेग u है तो उसकी गतिज ऊर्जा

$$\frac{1}{2} m v^2 = 3.126 \times 10^8 \text{ जूल}$$

या

$$v = \sqrt{\left(\frac{2 \times 3.126 \times 10^8}{8}\right)}$$

$$= 1.118 \times 10^4 \text{ मी/से}$$

$$= 11.18 \times 10^3 \text{ मी/से}$$

$$= \mathbf{11.18} \textbf{ किमी/से}$$

प्रश्न 19. पृथ्वी तल से किसी पिण्ड का पलायन वेग 11.2 किमी॰/सेकण्ड है। यदि किसी अन्य ग्रह की त्रिज्या पृथ्वी की त्रिज्या की आधी तथा द्रव्यमान पृथ्वी के द्रव्यमान का चौथाई हो तो उस ग्रह से पलायन वेग कितना होगा?

उत्तर– पृथ्वी तल से किसी पिण्ड का पलायन वेग

$$v_e = \sqrt{\left(\frac{2GM_e}{R_e}\right)} \quad ...(1)$$

(जहाँ M_e तथा R_e क्रमशः पृथ्वी का द्रव्यमान तथा त्रिज्या हैं)

किसी अन्य ग्रह के तल से पिण्ड का पलायन वेग

$$v_p = \sqrt{\left(\frac{2GM_p}{2R_p}\right)} \quad ...(2)$$

(जहाँ M_p तथा R_p क्रमशः ग्रह का द्रव्यमान तथा त्रिज्या हैं)

दिया है, $R_p = R_e/2$ तथा $M_p = M_e/4$, अतः समीकरण (2) में ये मान रखने पर,

$$v_p = \sqrt{\left(\frac{2G \times M_e / 4}{R_e / 2}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2GM_e}{2R_e}\right)}$$

या

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{\left(\frac{2GM_e}{R_e}\right)}$$

$$= \frac{v_e}{\sqrt{2}} \text{ (समीकरण (1) से)}$$

या

$$v_p = \frac{11.2}{\sqrt{2}} \text{ किमी/से}$$

$$= \frac{11.2}{1.414} \text{ किमी/से} = \mathbf{7.92} \textbf{ किमी/से}$$

प्रश्न 20. एक उपग्रह पृथ्वी तल से 3600 किमी० की दूरी पर वृत्तीय कक्षा में घूम रहा है। उपग्रह के कक्षीय वेग तथा परिक्रमण काल की गणना कीजिए। (पृथ्वी की त्रिज्या 6400 किमी०, पृथ्वी का द्रव्यमान 6×10^{24} किग्रा० तथा $G = 6.67 \times 10^{-11}$ न्यूटन-मी^{2}/ किग्रा०^2)

उत्तर– दिया है, पृथ्वी की त्रिज्या $R_e = 6400$ किमी, पृथ्वी तल से उपग्रह की दूरी $h = 3600$ किमी, पृथ्वी का द्रव्यमान $M_e = 6 \times 10^{24}$ किग्रा तथा $G = 6.67 \times 10^{-11}$ न्यूटन– मीटर^2 किग्रा^{2}

$\therefore$ उपग्रह की कक्षीय त्रिज्या $r = (R_e + h) = (6400 + 3600)$ किमी

$$= 10^4 \text{ किमी} = 10^7 \text{ मीटर}$$

अतः उपग्रह की कक्षीय चाल–

$$v_0 = \sqrt{\left(\frac{GM_e}{r}\right)} = \sqrt{\left(\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24}}{10^7}\right)} \text{ मीटर/सेकण्ड}$$

$$= 6.33 \times 10^3 \text{ मी/ सेकण्ड}$$

$$= \mathbf{6.33 \text{ किमी/सेकण्ड}}$$

उपग्रह का परिक्रमण काल,

$$T = \frac{2\pi r}{v_0} = \left[\frac{2 \times 3.14 \times (10^7)}{6.33 \times 10^3}\right] \text{सेकण्ड}$$

$$= \mathbf{9921 \text{ सेकण्ड} = 2.756 \text{ घण्टे}}$$

प्रश्न 21. 500 किग्रा० का एक कृत्रिम उपग्रह पृथ्वी से 1800 किमी० ऊँचाई पर पृथ्वी का चक्कर लगा रहा है। उपग्रह की (*i*) स्थितिज ऊर्जा (*ii*) गतिज ऊर्जा (*iii*) कुल ऊर्जा ज्ञात कीजिए। (पृथ्वी की त्रिज्या = 6400 किमी० तथा पृथ्वी तल पर गुरूत्वीय त्वरण $g = 10$ मी०/से०^2)

उत्तर– दिया है, कृत्रिम उपग्रह का द्रव्यमान $m = 500$ किग्रा, पृथ्वी की त्रिज्या $R_e = 6400$ किमी, पृथ्वी तल से उपग्रह की ऊँचाई = 1800 किमी तथा गुरूत्वीय त्वरण g = 10 मी/से^{2}

$\therefore$ (*i*) स्थितिज ऊर्जा

$$U = -\left[\frac{GM_e m}{(R_e + h)}\right] = -\left[\frac{gR_e^2 m}{(R_e + h)}\right]$$

$$(\because GM_e = gR_e^2)$$

$$\text{या } U = -\left[\frac{10 \times (6400 \times 10^3)^2 \times 500}{(6400 + 1800) \times 10^3}\right] \text{जूल}$$

$$= -2.497 \times 10^{10} \text{ जूल}$$

$$= \mathbf{-2.5 \times 10^{10} \text{ जूल}}$$

प्रश्न 22. पृथ्वी के समीप परिक्रमा करने वाले उपग्रह के कक्षीय वेग तथा परिक्रमण काल की गणना कीजिये। (पृथ्वी की त्रिज्या = 6.4×10^6 मी० तथा गुरूत्वीय त्वरण $g = 10$ मी/सेकण्ड^2)।

उत्तर– पृथ्वी की त्रिज्या = 6.4×10^6 मी तथा पृथ्वी तल पर गुरूत्वीय त्वरण $g = 10$ मीटर/ सेकण्ड^2। अतः पृथ्वी के समीप परिक्रमा करने वाले उपग्रह का कक्षीय वेग-

$$u_0 = \sqrt{(g \times R_e)} = \sqrt{10 \times 6.4 \times 10^6}$$

$$= 8.00 \times 10^3 \text{ मी/सेकण्ड}$$

$$= \mathbf{8.00 \text{ किमी/सेकण्ड}}$$

पृथ्वी के समीप परिक्रमा करने वाले उपग्रह का परिक्रमण काल,

$$T = 2\pi\sqrt{\left(\frac{R_e}{g}\right)} = 2 \times 3.14\sqrt{\left(\frac{6.4 \times 10^6}{10}\right)} \text{ सेकण्ड}$$

$$= 5024 \text{ सेकण्ड} = \mathbf{83.73 \text{ मिनट}}$$

प्रश्न 23. *R* किमी त्रिज्या की वृत्तीय कक्षा में घूम रहे उपग्रह का परिक्रमण काल 1 घण्टा है। 4 *R* किमी० त्रिज्या की वृत्तीय कक्षा में घूम रहे एक अन्य उपग्रह का परिक्रमण काल क्या होगा?

उत्तर– r त्रिज्या की वृत्तीय कक्षा में उपग्रह का परिक्रमण काल

$$T = 2\pi\sqrt{r^3 / GM_e}$$

अतः $T \propto r^{3/2}$ ($\because GM_e$ तथा 2π नियतांक हैं।)

अतः यदि $r_1 = R$ किमी तथा $r_2 = 4R$ किमी त्रिज्या की वृत्तीय कक्षा में उपग्रहों के परिक्रमण काल क्रमशः T_1 तथा T_2 हों तो–

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{3/2} \text{ या } T_2 = T_1\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{3/2}$$

$$\therefore \quad T_2 = 1 \text{घण्टा} \left(\frac{4R \text{ किमी}}{R \text{ किमी}}\right)$$

$$= 1 \times (2)^3 \text{ घण्टा} = \mathbf{8 \text{ घण्टा}}$$

प्रश्न 24. एक भू-उपग्रह पृथ्वी तल से 1800 किमी० की ऊँचाई पर परिक्रमा कर रहा है। पृथ्वी की त्रिज्या 6300 किमी० तथा पृथ्वी तल पर गुरूत्वीय त्वरण 10 मी०/से०^2 है। ज्ञात कीजिए–

(i) उपग्रह पर गुरूत्वीय त्वरण (ii) उपग्रह का कक्षीय वेग तथा (iii) उपग्रह का परिक्रमण काल

उत्तर– पृथ्वी की त्रिज्या $R_e = 6300$ किमी, पृथ्वी तल से भू-उपग्रह की ऊँचाई $h = 1800$ किमी

$\therefore$ उपग्रह की कक्षा की त्रिज्या $r = (r_e + h)$

$= (6300$ किमी $+ 1800$ किमी$)$

$= 8100$ किमी

$= 8100 \times 10^3$ मीटर

(i) उपग्रह पर गुरूत्वीय त्वरण–

$$g' = g\left(\frac{R_e}{R_e + h}\right)^2 = 10 \text{ मी/से}^2$$

$$= \left[\frac{6300 \times 10^3 \text{ मी}}{(6300 + 1800) \times 10^3 \text{ मी}}\right]^2 \approx 6.049 \frac{\text{मी}}{\text{से}^2}$$

$\approx$ 6 मी/ सेकण्ड^2

(ii) उपग्रह का कक्षीय वेग-

$$v_0 = \sqrt{\left(\frac{gR_e^2}{R_e + h}\right)} = \sqrt{\left(\frac{10 \times (6300 \times 10^3)^2}{8100 \times 10^3}\right)} \frac{\text{मी}}{\text{से}}$$

$= 7 \times 10^3$ मी/से $=$ **7 किमी/सेकण्ड**

(iii) उपग्रह का परिक्रमण काल-

$$T = 2\pi r / v_0$$

या $$T = \frac{2\pi(R_e + h)}{v_0}$$

$$= \frac{2 \times 3.14 \times 8100 \text{ किमी}}{7 \text{ किमी/सेकण्ड}}$$

$= 7266.857$ सेकण्ड

≈ 7266 सेकण्ड $\approx$ **2 घण्टा 1.1 मिनट**

प्रश्न 25. 40 किग्रा॰ तथा 80 किग्रा॰ द्रव्यमान के दो पिण्ड एक-दूसरे से 0.15 मीटर की दूरी पर स्थित है। इनके बीच लगने वाला गुरूत्वाकर्षण बल 1 मिलीग्राम भार है। गुरूत्वाकर्षण स्थिरांक की गणना कीजिये। (g = 10 मीटर/सेकण्ड^2)

उत्तर– न्यूटन के सार्वत्रिक गुरूत्वाकर्षण नियम से गुरूत्वाकर्षण बल

$$F = G\frac{m_1 \times m_2}{r^2}$$

या $$G = \frac{F \times r^2}{m_1 \times m_2}$$

दिया है: $F = 1.0$ मिलीग्राम भार, $= 10^{-6}$ किग्रा भार

$= 10^{-6} \times g$ न्यूटन

$= 10^{-6} \times 10$ न्यूटन $= 10^{-5}$ न्यूटन

$m_1 = 40$ किग्रा; $m_2 = 80$ किग्रा

तथा $r = 0.15$ मीटर

$$G = \frac{10^{-5} \text{ न्यूटन} \times (0.15 \text{ मी})^2}{40 \text{ किग्रा} \times 80 \text{ किग्रा}}$$

$G =$ **7.0 × 10^{-11} न्यूटन-मी^{2}/किग्रा^{2}**

प्रश्न 26. यदि पृथ्वी अपनी अक्ष पर इस प्रकार घूर्णन करे कि भूमध्य रेखा पर प्रत्यक्ष गुरूत्वीय त्वरण शून्य हो जाये तो दिन कितने घण्टे का होगा?(पृथ्वी की त्रिज्या = 6400 किमी॰ तथा g = 10 मीटर/सेकण्ड^2)

उत्तर– भूमध्य रेखा पर, पृथ्वी के घूर्णन के कारण गुरूत्वीय त्वरण

$$g' = g - R_e\omega^2$$

जहाँ g पृथ्वी के घूर्णन न करने (अर्थात् स्थिर रहने) की दशा में गुरूत्वीय त्वरण है तथा ω पृथ्वी की घूर्णन गति का कोणीय वेग है।

प्रश्न के अनुसार, $g' = 0$ होने की दशा में $g - R_e\omega^2 = 0$

अथवा $$\omega = \sqrt{\left(\frac{g}{R_e}\right)}$$

इस दशा में यदि पृथ्वी का अपनी अक्ष के परित: घूर्णन काल T हो, तो

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\left(\frac{R_e}{g}\right)}$$

उपर्युक्त सूत्र में R_e व g के मान रखने पर,

$$T = 2 \times 3.14 \times \left(\frac{6400 \times 10^3 \text{ मीटर}}{10 \text{ मी/से}^2}\right)$$

$= 6.28 \times 800$ सेकण्ड

$= 1.396$ घण्टे $=$ **1.4 घण्टे**

अत: भूमध्य रेखा पर g का मान शून्य होने की दशा में पृथ्वी अपना चक्कर 24 घण्टे के बजाय 1.4 घण्टे में पूरा कर लेगी। अत: दिन 1.4 घण्टे का होगा।

अध्याय 6

पदार्थों के गुण
Properties of Matter

एक शब्दीय उत्तर (ONE WORD ANSWERS)

प्रश्न 1. प्रतिबल का मात्रक लिखिए।
उत्तर– न्यूटन/मीटर^2

प्रश्न 2. विकृति की विमा लिखिए।
उत्तर– यह विमाहीन राशि है।

प्रश्न 3. रबर तथा काँच में कौन अधिक प्रत्यास्थ है?
उत्तर– काँच

प्रश्न 4. बल तथा दाब में क्या सम्बन्ध है? इनका सूत्र लिखिए।
उत्तर– दाब = बल/क्षेत्रफल

प्रश्न 5. द्रव का दाब किस पर निर्भर करता है?
उत्तर– द्रव स्तम्भ की ऊँचाई पर

प्रश्न 6. द्रव के भीतर किसी बिन्दु पर दाब की दिशा क्या होती है?
उत्तर– सभी दिशाओं में।

प्रश्न 7. पृष्ठ तनाव का S.I. मात्रक लिखिए।
उत्तर– न्यूटन/मीटर अथवा जूल/मीटर^2

प्रश्न 8. किस पदार्थ की केशनली में जल ऊपर चढ़ने के बजाय नीचे गिरेगा?
उत्तर– पैराफिन मोम की।

प्रश्न 9. किस गुणधर्म के कारण द्रव का मुक्त पृष्ठ अपने क्षेत्रफल को न्यूनतम रखने का प्रयास करता है?
उत्तर– पृष्ठ तनाव।

प्रश्न 10. जल के पृष्ठ तनाव को कैसे कम कर सकते हैं?
उत्तर– गर्म करके, तेल अथवा साबुन का घोल डालकर।

अति लघु उत्तरीय प्रश्न (VERY SHORT ANSWER QUESTIONS)

प्रश्न 1. केशिकात्व से आप क्या समझते है।
उत्तर– केशिकात्व (Capillarity)– द्रव का गुणधर्म जिसके कारण यह केशनली में ऊपर चढ़ जाता है या नीचे गिर जाता है केशिकात्व कहते हैं।

प्रश्न 2. श्यानता को परिभाषित कीजिये।
उत्तर– तरल का वह गुण है जिसके कारण तरल अपनी परतों के बीच होने वाली सापेक्ष गति का विरोध करता है श्यानता कहलाता है। श्यानता तरल का गुण है, ठोसों का नहीं।

प्रश्न 3. स्टोक्स का नियम समझाइये।
उत्तर– जब कोई गोलाकार वस्तु किसी श्यान माध्यम में गति करती है, तो माध्यम की श्यानता के कारण वस्तु पर एक श्यान बल, $F = 6\pi\eta rv$, गति की दिशा के विपरीत लगता है। इसे स्टोक्स का नियम कहते हैं।

प्रश्न 4. अविरतता का सिद्धान्त समझाइये।
उत्तर– किसी नली में प्रत्येक स्थान पर आदर्श द्रव के लिए अनुप्रस्थ परिच्छेद क्षेत्रफल तथा द्रव के वेग का गुणनफल नियत रहता है अर्थात्

$$AV = \text{नियतांक}$$

प्रश्न 5. बरनौली का प्रमेय स्पष्ट कीजिये।
उत्तर– आदर्श द्रव के धारा रेखीय प्रवाह में द्रव के एकांक आयतन की कुल ऊर्जा अर्थात् दाब ऊर्जा, गतिज ऊर्जा तथा स्थितिज ऊर्जा का योग नियत रहता है अर्थात्

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{नियतांक}$$

यदि प्रवाह क्षैतिज है तो

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{नियतांक}$$

प्रश्न 6. धारा रेखीय प्रवाह से क्या तात्पर्य है?

उत्तर– यह द्रव का नियमित प्रवाह है जिसमें द्रव का प्रत्येक कण अपने से पहले वाले कण के पथ व गति का अनुसरण करता है। कण के द्वारा चले गये पथ को धारा रेखा कहते हैं। इसके किसी बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखा उस बिन्दु पर द्रव के वेग की दिशा को प्रदर्शित करती है।

प्रश्न 7. हुक का नियम (Hookes law) समझाइये।

उत्तर– लघु विकृतियों की सीमा के अन्दर प्रतिबल, विकृति के अनुक्रमानुपाती होता है अतः प्रतिबल $\propto$ विकृति अथवा

$$\frac{\text{प्रतिबल}}{\text{विकृति}} = E \text{ (प्रत्यास्थता गुणांक)}$$

प्रश्न 8. प्रतिबल (stress) से आप क्या समझते हैं?

उत्तर– जब वस्तु बाह्य बल द्वारा निरूपित हो जाती है, तो उसके भीतर प्रत्यानयन बल उत्पन्न हो जाता है। प्रति एकांक क्षेत्रफल पर कार्य करने वाला प्रत्यानयन बल प्रतिबल कहलाता है। यह बाह्य बल की विपरीत दिशा में होता है। यदि A परिच्छेद क्षेत्रफल पर कार्य करने वाला बल F हो, तो प्रतिबल = F/A

प्रश्न 9. विकृति (Strain) से आप क्या समझते हैं?

उत्तर– बाह्य बलों के कारण किसी वस्तु की प्रति एकांक विमा में परिवर्तन को विकृति कहते हैं।

प्रश्न 10. प्रत्यास्थता को समझाइये।

उत्तर– प्रत्यास्थता पदार्थ का वह गुण है जिसके कारण वह अपने रूप व आकार के परिवर्तन का विरोध करता है।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न
(LONG ANSWER QUESTIONS)

प्रश्न 1. प्रत्यास्थता से आप क्या समझते हैं? प्रत्यास्थता की दृष्टि से वस्तुएं कितने प्रकार की होती है?

उत्तर–प्रत्यास्थता (Elasticity)– जब किसी वस्तु पर बाह्य बल लगाया जाता है तो वस्तु के आकार (size) अथवा रूप (shape) अथवा दोनों में परिवर्तन हो जाता है। इस बल को 'विरूपक बल' (deforming force) कहते हैं। इस बल से उत्पन्न परिवर्तन का विरोध करने का गुण कम या अधिक सभी पदार्थों में पाया जाता है। इसी गुण के कारण विरूपित वस्तु से विरूपक बल हटा लेने पर वह अपनी पूर्वावस्था की ओर लौट आती है। उदाहरण के लिए, रबर की डोरी खींचने पर उसकी लम्बाई बढ़ जाती है, परन्तु उसे छोड़ देने पर डोरी फिर अपनी पूर्व लम्बाई की ओर जाती है। पदार्थों के इस गुण को प्रत्यास्थता' कहते हैं तथा जिन वस्तुओं में यह गुण पाया जाता है, उन्हें प्रत्यास्थ (elastic) वस्तुएँ कहते हैं। अतः **''प्रत्यास्थता किसी वस्तु के पदार्थ का वह गुण है जिसके कारण, वस्तु अपने पर आरोपित विरूपक बल द्वारा उत्पन्न आकार अथवा रूप में परिवर्तन का विरोध करती है और जैसे ही विरूपक बल हटाया जाता है वस्तु अपनी पूर्वावस्था को प्राप्त करने लगती है।''**

प्रत्यास्थता की दृष्टि से वस्तुएँ तीन प्रकार की होती हैं-

(*i*) प्रत्यास्था वस्तुएँ, (*ii*) दृढ़ वस्तुएँ तथा (*iii*) प्लास्टिक सुघट्य वस्तुएँ

प्रत्यास्थ वस्तुएँ– जब किसी वस्तु पर विरूपक बल लगाने से उसके आकार या आकृति या दोनों में परिवर्तन हो जाता है और बल हटा लेने पर वह अपनी पूर्वावस्था में आ जाती है तो ऐसी वस्तु को प्रत्यास्थ वस्तु (elastic body) कहते हैं। प्रत्यास्थ वस्तुओं में होने वाले परिवर्तन अस्थायी होते हैं। इन वस्तुओं के उदाहरण हैं- रबर, ताँबा, लोहा, फॉस्फर, ब्रांज, क्वार्ट्ज आदि। संसार में ऐसी कोई वस्तु नहीं है जो सभी परिमाण के विरूपक बलों के लिए पूर्णतः प्रत्यास्थ हो। सबसे अधिक प्रत्यास्थ पदार्थ क्वार्ट्ज (quartz) माना जाता है।

दृढ़ वस्तुएँ– जब किसी वस्तु पर किसी भी परिमाण का विरूपक बल लगाने पर उसके अणुओं के बीच की दूरी बदलती नहीं है अर्थात् उसमें कोई विरूपण या विकृति नहीं होती तो उसे पूर्ण दृढ़ वस्तु (perfectly rigid body) कहते हैं। संसार में ऐसी कोई वस्तु नहीं है जिसे पूर्ण दृढ़ कहा जा सके, परन्तु डायमण्ड को लगभग पूर्ण दृढ़ माना जा सकता है।

प्लास्टिक या सुघट्य वस्तुएँ– जब कोई वस्तु विरूपक बल लगाने पर स्थायी रूप से विकृत हो जाती है ओर बल हटाने पर अपनी पूर्वावस्था प्राप्त करने की कोशिश तक नहीं करतीं, तो उसे पूर्ण प्लास्टिक वस्तु (perfectly plastic body) कहते हैं। संसार में यद्यपि कोई भी वस्तु पूर्णतः प्लास्टिक नहीं है परन्तु मोम, कुम्हार की मिट्टी, प्लास्टिसिन (plasticin) साबुन, सीसा (lead) आदि लगभग पूर्ण प्लास्टिक माने जा सकते हैं।

प्रश्न 2. प्रत्यास्थता की सीमा को परिभाषित करते हुए विस्तार में वर्णन कीजिये।

उत्तर– प्रत्यास्थता की सीमा (Limit of Elasticity)– "विरूपक बल के उस अधिकतम मान को जिसमें कम बल लगाने पर किसी वस्तु में प्रत्यास्थता का गुण बना रहता है, प्रत्यास्थता की सीमा कहते हैं।"

प्रत्यास्थ वस्तुओं पर से विरूपक बल हटा लेने पर वस्तुएँ अपनी पूर्वावस्था को प्राप्त कर लेती हैं। परन्तु वस्तुओं में यह गुण (प्रत्यास्थता का गुण) उस पर आरोपित विरूपक बल के एक विशेष मान तक ही सीमित रहता है। यदि विरूपक बल का मान इस विशेष मान से अधिक कर दिया जाये तो इस बल को हटा लेने पर भी वस्तु अपनी पूर्वावस्था में नहीं लौट पाती अर्थात् उसका प्रत्यास्थता का गुण नष्ट हो जाता है। उदाहरण के लिए, किसी तार के एक सिरे को दृढ़ आधार से बाँधकर, तार के दूसरे सिरे पर भार लटकाने पर तार लम्बाई में बढ़ जाता है। तार पर से भार हटा लेने पर वह पुनः अपनी प्रारम्भिक लम्बाई पर आ जाता है। यदि हम विरूपक बल (अर्थात् तार पर भार) के मान को धीरे-धीरे बढ़ाते जायें तो किसी विशेष मान से अधिक भार लटकाने पर, तार अपनी प्रारम्भिक लम्बाई पर नहीं आता, बल्कि सदा के लिए खिंच जाता है। अतः वस्तु में प्रत्यास्थता का गुण तब तक ही विद्यमान रहता है जब तक कि विरूपक बल का मान किसी निश्चित सीमा के अन्दर रहता है तथा इस सीमा के परे वस्तु का प्रत्यास्थता का गुण नष्ट हो जाता है। अलग-अलग वस्तुओं के लिए यह सीमा अलग-अलग है। अतः **किसी वस्तु पर लगाये गये विरूपक बल की उस अधिकतम सीमा को जिसके अन्तर्गत वस्तु के पदार्थ में प्रत्यास्थता का गुण विद्यमान रहता है, उस पदार्थ में प्रत्यास्थता की सीमा कहते हैं।**

प्रश्न 3. प्रतिबल को परिभाषित कीजिये तथा इसके प्रकारों का वर्णन कीजिये।

उत्तर– प्रतिबल (Stress) – साम्यावस्था में वस्तु की अनुप्रस्थ काट के एकांक क्षेत्रफल पर कार्य करने वाले आन्तरिक प्रतिक्रिया बल को प्रतिबल कहते हैं।

$$\text{प्रतिबल} = \frac{\text{आन्तरिक प्रतिक्रिया बल}}{\text{क्षेत्रफल}} = \frac{F}{A}$$

इसका S.I. मात्रक न्यूटन/मीटर^2 या Nm^{-2} होता है।

प्रतिबल के प्रकार (Types of Stress)– वस्तु में उत्पन्न प्रतिबल इस बात पर निर्भर करता है कि वस्तु पर बाहरी बल किस तरह लगाया गया है। इस आधार पर प्रतिबल तीन प्रकार के होते हैं- (*i*) अनुदैर्घ्य, (*ii*) अभिलम्ब और (*iii*) स्पर्शरेखीय प्रतिबल।

(*i*) अनुदैर्घ्य प्रतिबल (Longitudinal Stress)– जब बाहरी बल वस्तु की लम्बाई के अनुदिश (along) लगाया जाता है तो उसमें जो प्रतिबल उत्पन्न होता है, उसे अनुदैर्घ्य प्रतिबल कहते हैं।

(*ii*) अभिलम्ब प्रतिबल (Normal Stress)– जब विरूपक बल वस्तु के प्रत्येक पृष्ठ पर लम्बवत् समान रूप से लगाया जाता है तो वस्तु के आकार में परिवर्तन हो जाता है, आकृति में नहीं। इस दशा में उत्पन्न प्रतिबल अभिलम्ब प्रतिबल कहलाता है।

(*iii*) अपरूपण या स्पर्श-रेखीय प्रतिबल (Shearing or Tangential Stress)– जब किसी वस्तु पर विरूपक बल वस्तु की सतह पर स्पर्श-रेखीय लगाया जाता है तो वस्तु के आकार में परिवर्तन नहीं होता है बल्कि आकृति में परिवर्तन हो जाता है। इस दशा में वस्तु में उत्पन्न प्रतिबल अपरूपण प्रतिबल कहलाता है। इसको स्पर्श-रेखीय प्रतिबल भी कहते हैं।

प्रश्न 4. विकृति को परिभाषित कीजिये तथा इसके प्रकार बताइये।

उत्तर– विकृति (Strain)– "विरूपक बल के कारण किसी वस्तु की इकाई विमा में होने वाले परिवर्तन को विकृति कहते हैं।"

अतः विकृति

$$= \frac{\text{वस्तु की किसी विमा (लम्बाई, आयतन, आकृति) में परिवर्तन}}{\text{प्रारम्भिक विमा}}$$

मात्रक– चूँकि यह दो समान राशियों का अनुपात है, अतः इसका मात्रक नहीं होता।

विमाएँ– यह एक विमाहीन राशि है।

विकृति के प्रकार (Types of Strain)– विकृति तीन प्रकार की होती है- (*i*) अनुदैर्घ्य, (*ii*) आयतन तथा (*iii*) अपरूपण या आकृति विकृति।

(*i*) अनुदैर्घ्य विकृति (Longitudinal strain)– जब किसी वस्तु पर उसकी लम्बाई की दिशा में कोई विरूपक बल लगाया जाता है तो उसमें अनुदैर्घ्य या रेखीय विकृति उत्पन्न हो जाती है। वस्तु की लम्बाई में परिवर्तन और उसकी प्रारम्भिक लम्बाई के अनुपात को अनुदैर्घ्य विकृति कहते हैं।

मान लो वस्तु एक तार के रूप में है, यदि तार की लम्बाई L है तथा उसमें परिवर्तन l है तो-

$$\text{अनुदैर्घ्य विकृति} = \frac{\text{लम्बाई में परिवर्तन}}{\text{प्रारम्भिक लम्बाई}} = \frac{l}{L}$$

स्पष्ट है कि इस तरह की विकृति केवल ठोस पदार्थों में ही सम्भव है।

लम्बाई में परिवर्तन होने के कारण इस विकृति को तनन विकृति (tensile strain) भी कहते हैं।

(*ii*) **आयतन विकृति (Volume strain)**– जब विरूपक बल लगाने से वस्तु के आयतन में परिवर्तन होता है तो वस्तु में आयतन विकृति उत्पन्न हो जाती है। वस्तु के आयतन में परिवर्तन और उसके प्रारम्भिक आयतन के अनुपात को आयतन विकृति कहते हैं। यदि विरूपक बल के कारण वस्तु के प्रारम्भिक आयतन V में परिवर्तन ΔV होता है तो-

$$\text{आयतन विकृति} = \frac{\text{आयतन में परिवर्तन}}{\text{प्रारम्भिक आयतन}} = \frac{\Delta V}{V}$$

ठोस और द्रवों में आयतन विकृति बहुत कम होती है, परन्तु गैसों में बहुत अधिक होती है।

(*iii*) अपरूपण या आकृति विकृति (Shearing or Shape Strain)– जब किसी वस्तु की सतह पर स्पर्श रेखा के अनुदिश विरूपक बल लगाया जाता है और इसके सामने वाले फलक (face) को दृढ़ आधार के बीच स्थिर कर दिया जाता है तो न तो वस्तु की लम्बाई में परिवर्तन होता है और न ही वस्तु के आयतन में, परन्तु वस्तु की आकृति में परिवर्तन होता है। वस्तु में इस तरह उत्पन्न विकृति को अपरूपण या आकृति विकृति कहते हैं। इसकी माप रेडियन में मापे गये अपरूपण कोण के द्वारा की जाती है।

प्रश्न 5. हुक का नियम बताइये। प्रत्यास्थता गुणांक को समझाते हुए प्रकारों का उल्लेख कीजिये।

उत्तर– हुक का नियम (Hookes law)– प्रत्यास्थता की सीमा के अन्दर प्रतिबल, विकृति के अनुक्रमानुपाती होता है।

अतः प्रतिबल × विकृति

अथवा प्रतिबल $= E \times$ विकृति

जहाँ E एक नियतांक है जिसे प्रत्यास्थता गुणांक कहते हैं।

$$\text{अतः प्रत्यास्थता गुणांक } (E) = \frac{\text{प्रतिबल}}{\text{विकृति}}$$

प्रत्यास्थता गुणांक (Modulus of Elasticity)– "किसी दी हुई वस्तु के पदार्थ के लिए प्रत्यास्थता की सीमा के अन्तर्गत प्रतिबल तथा विकृति का अनुपात सदैव एक नियतांक होता है। इस नियतांक को E से प्रदर्शित करते हैं तथा इसे उस पदार्थ का प्रत्यास्थता गुणांक (modulus of elasticity) कहते हैं।"

E का मान एक वस्तु के पदार्थ के लिए नियत रहता है।

मात्रक– चूँकि विकृति का कोई मात्रक नहीं होता है, अतः प्रत्यास्थता गुणांक का मात्रक वही होता है जो प्रतिबल का होता है। अतः इसका SI मात्रक न्यूटन प्रति वर्ग मीटर होता है।

विमीय सूत्र–$[E]$ = [प्रतिबल] $= [ML^{-1}T^{-2}]$

प्रत्यास्थता गुणांक के प्रकार (Types of Modulus of Elasticity)– किसी वस्तु पर आरोपित विरूपक बल (अर्थात् प्रतिबल) एवं इसके संगत वस्तु में उत्पन्न विकृति के आधार पर प्रत्यास्थता गुणांक तीन प्रकार का होता है–

(*i*) यंग-प्रत्यास्थता गुणांक 'Y', (*ii*) आयतन प्रत्यास्थता गुणांक 'B' तथा (*iii*) दृढ़ता गुणांक η

(*i*) यंग प्रत्यास्थता गुणांक (Youngs modulus)– प्रत्यास्थता की सीमा के अन्तर्गत अनुदैर्ध्य विकृति के अनुपात को यंग प्रत्यास्थता गुणांक कहते हैं। इसको Y से प्रदर्शित करते हैं।

$$Y = \frac{\text{अनुदैर्ध्य प्रतिबल}}{\text{अनुदैर्ध्य विकृति}}$$

(*ii*) आयतन प्रत्यास्थता गुणांक (Bulk modulus)– प्रत्यास्थता सीमा के अन्दर अभिलम्ब प्रतिबल और आयतन विकृति के अनुपात को आयतन प्रत्यास्थता गुणांक कहते हैं।

अतः आयतन प्रत्यास्थता गुणांक (B)

$$= \frac{\text{अभिलम्ब प्रतिबल}}{\text{आयतन विकृति}}$$

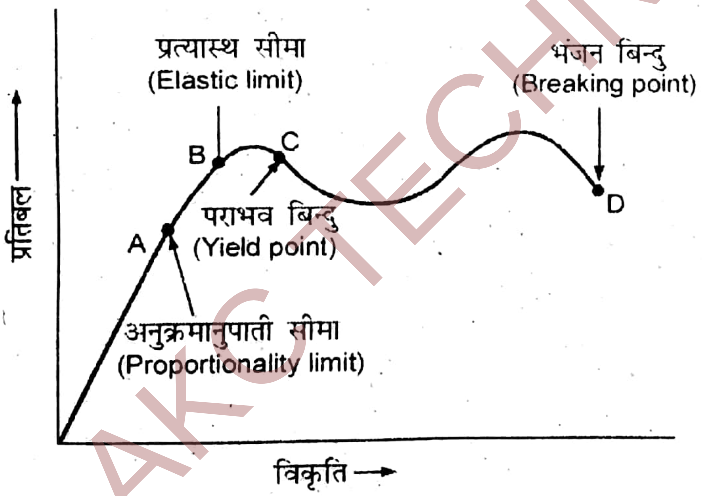
(*iii*) दृढ़ता गुणांक (Coefficient of Rigidity)– प्रत्यास्थता की सीमा के अन्दर, अपरूपक प्रतिबल तथा अपरूपण विकृति के अनुपात को ठोस वस्तु के पदार्थ का दृढ़ता गुणांक कहते हैं। इसे η से प्रदर्शित किया जाता है।

$$\text{ठोस पदार्थ का दृढ़ता गुणांक } (\eta) = \frac{\text{अपरूपक प्रतिबल}}{\text{अपरूपण विकृति}}$$

प्रश्न 6. प्रतिबल विकृति-वक्र के बारे में समझाइये।

उत्तर– हुक के नियम के अनुसार किसी वस्तु पर बाह्य बल आरोपित करने से उत्पन्न विकृति प्रतिबल के समानुपाती होती है परन्तु यह नियम केवल लघु विकृतियों के लिए ही लागू होता है।

माना किसी धातु के तार के एक सिरे को दृढ़ आधार से बाँधकर लटकाया गया है। तार के दूसरे सिरे पर धीरे-धीरे भार को बढ़ाकर विभिन्न स्थितियों के लिए प्रतिबल और विकृति के मध्य ग्राफ के अनुसार प्राप्त होता है। वक्र का OA भाग सरल रेखा है जिससे यह स्पष्ट होता है कि विकृति, प्रतिबल के अनुक्रमानुपाती है तथा इस क्षेत्र में भार हटा लेने पर तार अपनी प्रारम्भिक अवस्था में पुनः वापस आ जाता है। बिन्दु A को अनुक्रमानुपाती सीमा कहते हैं। बिन्दु A से B तक का ग्राफ वक्रीय है तथा यहाँ विकृति प्रतिबल के अनुक्रमानुपाती नहीं रहती परन्तु भार हटाने पर तार अपनी प्रारम्भिक अवस्था पुनः प्राप्त कर लेता है। अतः बिन्दु B के बाद विकृति का मान प्रतिबल की तुलना में अधिक तेजी से बढ़ता है तथा तार की प्रत्यास्थता घटने लगती है। धीरे-धीरे तार की प्लास्टिकता बढ़ने लगती है तथा भार हटा लेने पर वह अपनी प्रारम्भिक अवस्था पुनः प्राप्त नहीं करता। बिन्दु C के बाद प्रतिबल होती रहती है परंतु विकृति अनियमित रूप में बढ़ती जाती है। बिन्दु C को पराभव बिन्दु कहते हैं।



चित्र–1.

पराभव बिन्दु के बाद भार बढ़ाने पर तार की लम्बाई तेजी से बढ़ती है तथा एक स्थिति ऐसी आती है जहाँ तार टूट जाता है। बिन्दु B पर तार टूटता है अतः इसे भंजन बिन्दु कहते हैं।

प्रश्न 7. 2 मीटर लम्बे धातु के एक तार के निचले सिरे 4 किग्रा. भार लटकाने से उसकी लम्बाई में 1 मिमी. की वृद्धि हो जाती है। ज्ञात कीजिये।

(*i*) तार में उत्पन्न प्रतिबल (*ii*) विकृति (*iii*) तार के पदार्थ का यंग प्रत्यास्थता गुणांक। तार के अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल 10 वर्ग मिमी. तथा $g = 10$ मी./से.^{2}

उत्तर– तार की प्रारम्भिक लम्बाई $L = 2$ मीटर

तार के अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल $A = 10$ वर्ग मिमी.

$$= 10 \times 10^{-6} \text{ मी}^2 = 10^{-5} \text{ मी}^2$$

तार की लम्बाई में वृद्धि $l = 1$ मिमी $= 10^{-3}$ मीटर

तार पर आरोपित बल $F = 4$ किग्रा भार $= 4 \times g$ न्यूटन $= 4 \times 10$ न्यूटन $= 40$ न्यूटन

(*i*) तार में उत्पन्न अनुदैर्ध्य प्रतिबल

$$= \frac{F}{A} = \frac{40 \text{ न्यूटन}}{10^{-5} \text{ मीटर}^2}$$

$$= 4.0 \times 10^6 \text{ न्यूटन/मी}^2$$

(*ii*) तार में उत्पन्न अनुदैर्ध्य विकृति

$$= \frac{l}{L} = \frac{10^{-3} \text{ मीटर}}{2 \text{ मीटर}}$$

$$= 0.5 \times 10^{-3} = 5.0 \times 10^{-4}$$

(*iii*) तार के पदार्थ का यंग-प्रत्यास्थता गुणांक

$$Y = \frac{\text{अनुदैर्ध्य प्रतिबल}}{\text{अनुदैर्ध्य विकृति}}$$

$$= \frac{4.0 \times 10^6 \text{ न्यूटन}}{5.0 \times 10^{-4} \text{ मीटर}^2}$$

$$= 8 \times 10^{11} \text{ न्यूटन/मीटर}^2$$

प्रश्न 8. 4 मीटर लम्बे तार की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल 1.2 सेमी.^{2} है। यह तार 4.8×10^3 न्यूटन के बल द्वारा खींचा जाता है। यदि तार का यंग प्रत्यास्थता गुणांक $Y = 1.2 \times 10^{11}$ न्यूटन/मीटर^2 हो तो प्रतिबल विकृति तथा लम्बाई में वृद्धि की गणना कीजिये।

उत्तर–तार की लम्बाई $L = 4$ मीटर, तार के अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल $A = 1.2$ वर्ग सेमी $= 1.2 \times 10^{-4}$ मीटर^2, तार पर आरोपित बल $F = 4.8 \times 10^3$ न्यूटन तथा तार के पदार्थ का यंग-प्रत्यास्थता गुणांक $Y = 1.2 \times 10^{11}$ न्यूटर/मीटर^2

$$\text{प्रतिबल} = \frac{F}{A} = \frac{4.8 \times 10^3 \text{ न्यूटन/मीटर}}{1.2 \times 10^{-4} \text{ मीटर}^2}$$

$$= 4.0 \times 10^7 \text{ न्यूटन/मी}^2$$

[चूँकि यंग-प्रत्यास्थता गुणांक $Y = \dfrac{\text{प्रतिबल}}{\text{विकृति}}$

अतः विकृति $= \dfrac{\text{प्रतिबल}}{Y} = \dfrac{4.0\times10^{7} \text{ न्यूटन/मीटर}}{1.2\times10^{11} \text{ न्यूटन/ मीटर}^2}$

$= 3.33 \times 10^{-4} \times 4$

परन्तु तार में उत्पन्न विकृति

$= \dfrac{\text{लम्बाई में वृद्धि}}{\text{प्रारम्भिक लम्बाई}} = \dfrac{l}{L}$

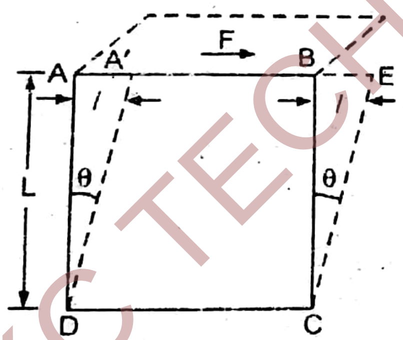
$\therefore$ तार की लम्बाई में वृद्धि $l =$ विकृति $\times L$

$= 3.33 \times 10^{-4} \times 4$ मीटर

$= 1.332 \times 10^{-3}$ मीटर

$= 1.332$ मिमी

प्रश्न 9. 50 सेमी भुजा की सीसे (lead) की एक वर्गाकार प्लेट जिसकी मोटाई 5.0 सेमी हैं, संलग्न चित्र के अनुसार अपने नीचे के सिरे पर फर्श पर दृढ़तापूर्वक फँसी है। $F = 9.0 \times 10^4$ न्यूटन परिमाण का अपरूपक बल इसके संकीर्ण (narrow) तल पर आरोपित किया जाता है। यदि सीसे का दृढ़ता गुणांक $\eta = 5.6 \times 10^9$ न्यूटन/मीटर^2 हो तो प्लेट का ऊपरी किनारा कितना विस्थापित हो जायेगा?



चित्र-2.

उत्तर– माना ऊपरी किनारा l दूरी विस्थापित हो जाता है।

$\therefore$ अपरूपण विकृति $\theta = \dfrac{F}{A} = \dfrac{l}{0.5} = 2l$

उस तल का क्षेत्रफल, जिस पर बल F आरोपित किया गया है–

$A = 50 \times 5 \times 10^{-4}$ मीटर^2

$= 25 \times 10^{-3}$ मीटर^2

$\therefore$ अपरूपक प्रतिबल $= \dfrac{F}{A} = 9.0 \times 10^{-4} / 25 \times 10^{-3})$ न्यूटन/मीटर^2

$= (9/25) \times 10^7$ न्यूटन/मीटर^2

परन्तु दृढ़ता गुणांक

$$\eta = \frac{F/A}{\theta} = \frac{(9/25)\times10^7}{2l}$$

$$\text{या } l = \frac{9\times10^7}{2.5\times2\times\eta}$$

$$= \frac{9\times10^7}{50\times5.6\times10^9}$$

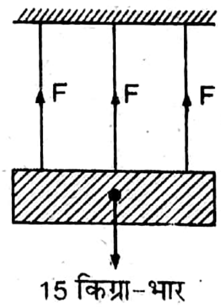
$= 3.21 \times 10^{-4}$ मीटर

प्रश्न 10. 5 किग्रा द्रव्यमान की एक दृढ़ छड़ को तीन तारों, जिनमें से प्रत्येक की लम्बाई 2 मीटर है, से सममित लटकाया गया है। सिरों के दोनों तार ताँबे के हैं तथा बीच वाला तार लोहे का है। तारों के व्यासों का अनुपात ज्ञात कीजिए जबकि प्रत्येक पर तनाव उतना ही रहना चाहिए। ($Y_{\text{ताँबा}} = 120 \times 10^3$ न्यूटन/मी^{2}; $Y_{\text{लोहा}} = 190 \times 10^9$ मी^{2})

उत्तर– प्रत्येक तार द्वारा सम्भाला जाने वाला भार

$$F = \frac{15 \text{ किग्रा-भार}}{3} = 5 \text{ किग्रा-भार}$$

$= 5 \times 9.8$ न्यूटन $= 49.0$ न्यूटन



चित्र-3.

प्रत्येक की लम्बाई $L = 2$ मीटर; प्रत्येक पर तनाव समान रहने की दिशा में प्रत्येक के लिए l भी समान होगा।

$\therefore$ सूत्र $\quad Y = \dfrac{FL}{A\times l}$ से

$$Y = \frac{F\times L}{\pi(r^2)l} = \frac{F\times L}{\pi(D/2)^2 l}$$

(जहाँ D = तारों का व्यास)

$$= \frac{4F.L}{\pi D^2 l} \Rightarrow D^2 = \frac{4FL}{\pi l Y}$$

यहाँ प्रत्येक तार के लिए F, L तथा l समान होने के कारण $D^2 \propto 1/Y$ अथवा $D \propto 1/\sqrt{Y}$

$$\therefore \quad \frac{D_{\text{ताँबा}}}{D_{\text{लोहा}}} = \sqrt{\frac{Y_{\text{लोहा}}}{Y_{\text{ताँबा}}}}$$

$$= \sqrt{\frac{(190\times10^9)}{(120\times10^9 \text{ न्यूटन/मी})}} = \sqrt{\frac{19}{12}}$$

$$= 1.257$$

प्रश्न 11. दाब से आप क्या समझते हैं? इसका मात्रक लिखिए।

उत्तर– दाब (Pressure)– किसी पृष्ठ के प्रति एकांक क्षेत्रफल पर लगने वाले लम्बवत् बल को दाब कहते हैं।

यदि A मीटर^2 वाले क्षेत्रफल पर F न्यूटन बल लम्बवत् कार्य करता है तब

$$\text{दाब} = \frac{\text{लम्बवत् बल}}{\text{क्षेत्रफल}} \text{ अर्थात्}$$

$$\boxed{P = \frac{F}{A}}$$

मात्रक (Unit)– दाब का मात्रक न्यूटन/मीटर^2 है। दाब एक अदिश राशि है।

प्रश्न 12. निम्नलिखित पर संक्षिप्त टिप्पणी लिखिए–

(i) वायुमण्डलीय दाब (Atmospheric pressure)

(ii) गेज दाब (Gauge pressure)

(iii) परम दाब (Absolute pressure)

उत्तर– (i) वायुमण्डलीय दाब– पृथ्वी का वायुमण्डल पृथ्वी सतह से लगभग 200 किमी० ऊँचाई तक फैला हुआ है। वायुमण्डल पृथ्वी सतह पर स्थित सभी वस्तुओं पर दाब डालता है। किसी भी वस्तु पर वायु द्वारा लगाया गया बल वस्तु की सतह के लम्बवत् होता है। पृथ्वी के वायुमण्डल में 78% नाइट्रोजन, 21% ऑक्सीजन तथा कार्बन डाइऑक्साइड आदि की कुछ मात्रा होती है। पृथ्वी की सतह से ऊपर की ओर जाने पर वायुमण्डल का घनत्व कम हो जाता है। वायुमण्डल के अंत में वायु का दाब लगभग शून्य हो जाता है। इस प्रकार वायुमण्डल द्वारा वस्तुओं पर लगाया गया दाब ही वायुमण्डलीय दाब कहलाता है। पृथ्वी की सतह पर वायुमण्डलीय दाब अधिकतम होता है। इसका मान लगभग 1.01×10^5 न्यूटन/मी^{2} अथवा पास्कल (Pa) होता है।

(ii) गेज दाब– दाब मापन के लिए प्रयुक्त यंत्र को दाब गेज कहते हैं। अधिकांश दाब गेज वायुमण्डलीय दाब को निम्नस्तर मानकर दाब का मापन करते हैं अर्थात् वे वास्तविक दाब तथा वायुमण्डलीय दाब के अन्तर का मापन करते हैं। इस दाब को गेज दाब कहते हैं।

गेज दाब = परम दाब – वायुमण्डलीय दाब

(iii) परम दाब– किसी बिन्दु पर वास्तविक दाब को परम दाब कहते हैं। गेज दाब को वायुमण्डलीय दाब के ऊपर अथवा नीचे प्रदर्शित किया जाता है। वह गेज जो वायुमण्डलीय दाब से नीचे दाब का मापन करता है, वैकुम गेज कहलाता है।

प्रश्न 13. फोर्टिन बैरोमीटर पर संक्षिप्त टिप्पणी लिखिए।

उत्तर– फोर्टिन बैरोमीटर (Fortins Barometer)– फोर्टिन बैरोमीटर साधारण टेरीसीलीज बैरोमीटर का सुधरा रुप है। फोर्टिन बैरोमीटर में पतली काँच की नली होती है जिसमें मरकरी भरी होती है। नली में पूरी मरकरी का वातावरण में दाब परिवर्तन के साथ पाठ्यांक बदलता रहता है। इस प्रक्रिया को कैलीब्रेटेड पैमाने की सहायता से पढ़ लेते हैं। फोर्टिन बैरोमीटर पोर्टेबल बैरोमीटर नहीं है। परन्तु इसका पाठ्यांक ज्यादा शुद्ध है।

प्रश्न 14. पृष्ठ तनाव की परिभाषा दीजिये। इसके मात्रक तथा विमीय सूत्र भी लिखिए। (2011, 2016(s))

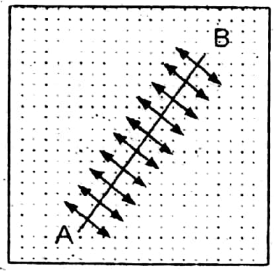
उत्तर– पृष्ठतनाव (Surface Tension)– पृष्ठतनाव द्रव का वह गुण है जिसके कारण वह एक प्रत्यास्थ तनी हुई झिल्ली की भाँति व्यवहार करता है जिसकी प्रवृत्ति सिकुड़ने की होती है ताकि वह न्यूनतम क्षेत्रफल की सतह धारण कर सके।

पृष्ठ तनाव का मापन– किसी द्रव की मुक्त सतह पर एक काल्पनिक रेखा AB खींचिए। पृष्ठ का न्यूनतम क्षेत्रफल प्राप्त करने के लिए लाइन AB की दोनों साइडों में द्रव तलों की प्रवृत्ति एक-दूसरे से दूर जाने की होती है। माना सतह की फिल्म को लाइन AB के अनुदिश काटा जाता है तब दोनों साइड की फिल्म सिकुड़ती है।

यदि लाइन की लम्बाई l है तथा इसके किसी भी ओर कार्य करने वाला सम्पूर्ण बल F है, तब पृष्ठ तनाव

$$T = \frac{F}{l}$$

यदि $l = 1$ तब $T = F$ अर्थात्



चित्र-4.

"किसी द्रव का पृष्ठ तनाव वह बल है जो द्रव के पृष्ठ पर खींची गयी किसी काल्पनिक रेखा की एकांक लम्बाई पर पृष्ठ तल के अनुदिश रेखा के लम्बवत् कार्य करता है।"

उदाहरण- पानी की बूंद का बनना।

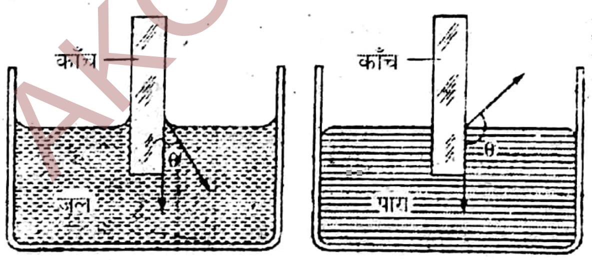
पृष्ठतनाव का मात्रक न्यूटन/मीटर (Nm^{-1}) है।

$\therefore$ विमा (MT^{-2}) है।

प्रश्न 15. स्पर्श कोण (Angle of contact) को विस्तार में समझाइये।

उत्तर– स्पर्श कोण (Angle of contact)– जब कोई ठोस किसी द्रव के मुक्त पृष्ठ के सम्पर्क में आता है तो सम्पर्क के स्थान (place of contact) पर द्रव की सतह कुछ वक्राकार (curved) हो जाती है। उदाहरण के लिए, काँच-जल के लिए यह सतह अवतल तथा काँच–पारा के लिए उत्तल होती है।

"द्रव व ठोस के स्पर्श बिन्दु से द्रव के पृष्ठ पर खींची गयी स्पर्श रेखा तथा ठोस के पृष्ठ पर द्रव के अन्दर की ओर खींची गयी स्पर्श रेखा के बीच बने कोण को उस ठोस व द्रव के लिए स्पर्श कोण कहते हैं।" चित्र- 5 में स्पर्श कोण को 'θ' से प्रदर्शित किया गया है।



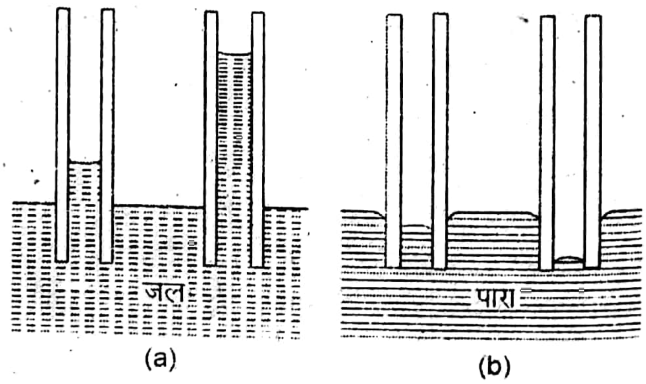
चित्र–5.

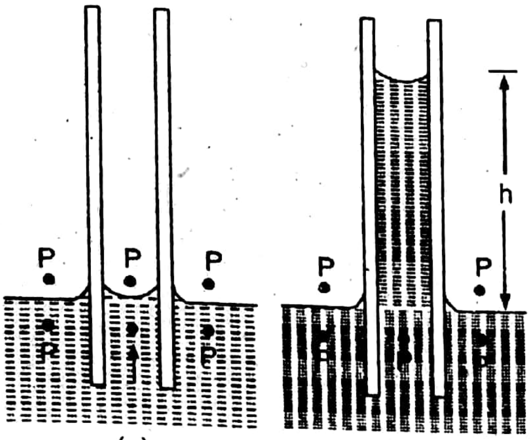
स्पर्श कोण का मान ठोस व उसके सम्पर्क में आये द्रव की प्रकृति पर निर्भर करता है। जो द्रव ठोस को भिगोते हैं उनके लिए स्पर्श कोण न्यूनकोण (90° से कम) होता है और उनका पृष्ठ अवतल होता है। जो द्रव ठोस को नहीं भिगोते उनके लिए स्पर्श कोण अधिक कोण (90° से अधिक) होता है और उनका पृष्ठ उत्तल होता है। स्वच्छ जल तथा काँच के लिए स्पर्श कोण का मान 8° जबकि पारा तथा काँच के लिए स्पर्श कोण का मान 135° होता है। स्पर्श कोण द्रव तथा ठोस के जोड़े तथा अशुद्धियों पर निर्भर करता है।

चाँदी तथा जल के लिए स्पर्श कोण का मान 90° होने के कारण चाँदी के बर्तन में भरे जल का तल किनाने पर भी क्षैतिज होता है।

प्रश्न 16. केशिकात्व को चित्र की सहायता से स्पष्ट करते हुए कारणों का उल्लेख कीजिए। (2013, 2016)

उत्तर– केशिकात्व (Capillary action)– दोनों सिरों पर खुली बारीक छिद्र की काँच की नली केशनली (capillary tube) कहलाती है। जब एक काँच की केशनली के एक सिरे को जल में डुबोकर उसे सीधा खड़ा करते हैं तो केशनली में कुछ ऊँचाई तक जल चढ़ जाता है। केशनली का छिद्र जितना बारीक होता है जल उतनी ही ऊँचाई तक चढ़ता है। [चित्र–6 (*a*)]। इसके विपरीत जब केशनली को पारे में डुबोया जाता है, तो पारा केशनली में नीचे उतर जाता है। (चित्र- 6 (*b*)। द्रव के इस गुण-धर्म को जिसके कारण यह केशनली में ऊपर चढ़ जाता है या नीचे गिर जाता है केशिकात्व (Capillarity) कहते हैं। ध्यान रहे जो द्रव काँच को भिगोते हैं अथवा जिनके लिए स्पर्श कोण 'न्यूनकोण' होता है वे काँच की केशनली में ऊपर चढ़ते हैं। इसके विपरीत जो (द्रव) काँच को नहीं भिगोते हैं अथवा जिनके लिए स्पर्श कोण 'अधिक कोण' होता है वे काँच की केशनली में वह ऊँचाई जिस तक द्रव केशनली में चढ़ता या उतरता है केशनली की त्रिज्या के व्युत्क्रमानुपाती होती है। यही केशिकात्व के सम्बन्ध में जूरिन (Jurin) का नियम है।





चित्र–6.

केशिकात्व का कारण (Cause of Capillarity)– जब केशनली को द्रव में डुबोया जाता है, तो उसके अन्दर द्रव की सतह वक्र होती है। जल के लिए वक्र सतह अवतल तथा पारे के लिए उत्तल होती है। अवतल सतह के ठीक नीचे जल में दाब, सतह के ऊपरी दाब से 2T/R कम होता है। यहाँ R वक्र तल की त्रिज्या व T जल के पृष्ठ तनाव है। यदि केशनली के बाहर द्रव पर वायुमण्डलीय दाब P हो, तो केशनली में द्रव की सतह के ठीक नीचे दाब $\left(P-\frac{2T}{R}\right)$ होगा। (चित्र– 7 (a))।

क्योंकि द्रव के एक ही तल में समान दाब होता है, अतः केशनली में द्रव-सतह के नीचे दाब में कमी $\left(\frac{2T}{R}\right)$ को पूरा करने के लिए ऊपर चढ़ने लगता है।

प्रश्न 17. केशिका उन्नयन सिद्धान्त से जल का पृष्ठ तनाव ज्ञात करने की विधि का वर्णन कीजिये। (2016 (s))

उत्तर– केशिका उन्नयन सिद्धान्त से जल का पृष्ठ तनाव ज्ञात करना (Determination of Surface tension of liquid by capillary rise method)– r त्रिज्या की काँच से बनी केशनली में चढ़े द्रव (जल) स्तम्भ की ऊँचाई के सूत्र $h = \frac{2T\cos\theta}{r\rho g}$

जहाँ ρ = जल का घनत्व, g = गुरुत्व त्वरण तथा θ = काँच-जल का स्पर्श कोण से जल का पृष्ठ तनाव–

$$T = \frac{rh\rho g}{2\cos\theta} \qquad ...(1)$$

शुद्ध जल तथा स्वच्छ काँच के लिए θ का मान बहुत कम (लगभग शून्य) मान लिया जाये जो $\cos\theta = \cos 0° = 1$ अतः

$$T = \frac{rh\rho g}{2} \qquad ...(2)$$

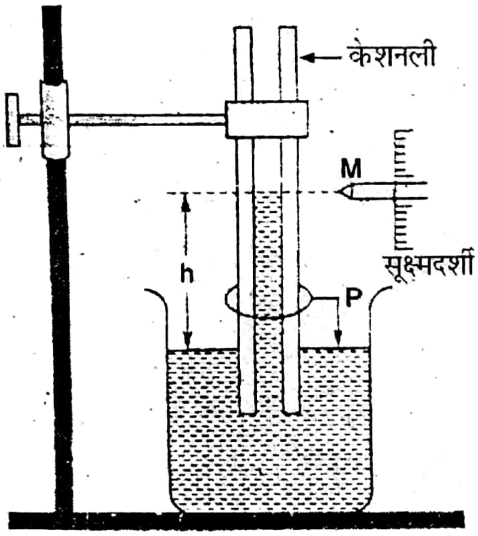
इस सूत्र में प्रयोग द्वारा h तथा r के मान ज्ञात करके सूत्र की सहायता से जल के पृष्ठ तनाव T की गणना की जा सकती है–

प्रयोग विधि–प्रयोग करने के लिए काँच की लम्बाई में सर्वत्र एकसमान व्यास वाली एक केशनली लेकर उसको पहले कास्टिक सोडे द्वारा तथा तत्पश्चात् नाइट्रिक अम्ल द्वारा साफ करके अन्त में जल से धोकर उसको सुखा लेते हैं। अब इस केशनली को चित्र- 8 की भाँति एक ऊर्ध्वाधर स्टैण्ड में इस प्रकार कस देते हैं कि इसका निचला सिरा एक बीकर में रखे प्रायोगिक द्रव (जल में) डूबा रहे। एक पिन P जो दो बार समकोण पर मुड़ी रहती है केशनली की लम्बाई के सहारे रबड़ बैण्ड द्वारा सम्बन्धित रहती है। अब पिन P को इस प्रकार समायोजित करते हैं कि इसका सिरा बीकर में जल के क्षैतिज तल को छुए। जब जल नली में चढ़कर स्थिर हो जाता है, तो एक चल-सूक्ष्मदर्शी को नली में तल के वक्र पृष्ठ के निम्नतम बिन्दु पर फोकस करके इसका पाठ्यांक ले लेते हैं। इसके पश्चात् बीकर हटा लेते हैं तथा चल-सूक्ष्मदर्शी को पिन P के निचले सिरे पर फोकस करके इसका पाठ्यांक ले लेते हैं। इन दोनों पाठ्यांकों का अन्तर ही केशनली में चढ़े जल स्तम्भ की ऊँचाई h के बराबर होगा।

अब नली का आन्तरिक व्यास भी चल-सूक्ष्मदर्शी की सहायता से निम्नलिखित प्रकार से ज्ञात करते हैं–

इसके लिए केशनली को क्षैतिज स्टैण्ड पर रखकर चल-सूक्ष्मदर्शी को केशनली के इस सिरे पर फोकस करते हैं। सूक्ष्मदर्शी को केशनली के अन्दर की दीवारों के दोनों किनारों पर बारी-बारी से फोकस करके इसके पाठ्यांक नोट कर लेते हैं। इन पाठ्यांकों का अन्तर ही केशनली का आन्तरिक व्यास होगा। इसका आधा करके केशनली की त्रिज्या r ज्ञात कर लेते हैं। जल का ताप नापकर उस ताप पर जल का घनत्व ρ, घनत्व सारणी से ज्ञात कर लेते हैं।

अब उपरोक्त सूत्र में r, $h\rho$ तथा g के मान रखकर जल के पृष्ठ तनाव T की गणना कर लेते हैं। T का यह मान कमरे के ताप पर प्राप्त होता है।



चित्र-8.

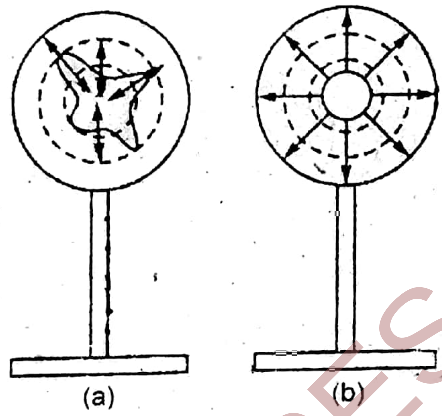
प्रश्न 18. दैनिक जीवन में पृष्ठ तनाव के अनुप्रयोगों को समझाइये।

उत्तर– दैनिक जीवन में पृष्ठ तनाव के अनुप्रयोग निम्नलिखित हैं–

(1) रंग भरने वाले मुलायम बालों के एक ब्रश को पानी में डुबोया जाता है तो ब्रश के बाल अलग-अलग हो जाते हैं लेकिन पानी से बाहर निकलने पर ब्रश पर बना पानी का स्वतन्त्र पृष्ठ न्यूनतम क्षेत्रफल प्राप्त करने का प्रयास करता है और फलत: ब्रश के बाल आपस में सट जाते हैं।

(2) मुलायम बालों से बने हजामत बनाने वाले ब्रश (shaving brush) को पानी में डुबोने पर इसके बाल अलग-अलग रहते हैं परन्तु पानी से बाहर निकालने पर बाल आपस में सट जाते हैं। इसका कारण यह है कि पानी से निकालने पर ब्रश पर लगे पानी का स्वतन्त्र तल सिकुड़ने की चेष्टा करता है; जिससे ब्रश के बाल आपस में सट जाते हैं।

(3) तार का एक वृत्ताकार फ्रेम बनाकर, उसे साबुन के घोल में डुबोकर बाहर निकालने पर इस पर साबुन के घोल की एक पतली फिल्म बन जाती है। धागे का एक फन्दा बनाकर इस फिल्म के ऊपर रख देने से यह टेढ़ा-मेढ़ा होकर रखा रहता है। (चित्र– 9 (*a*)) अब गर्म आलपिन की नोंक धागे के फन्दे के अन्दर की फिल्म में चुभोकर तोड़ देते हैं तो यह फन्दा तुरन्त तनकर वृत्ताकार रूप ले लेता है। [चित्र– 9 (*b*)] इसका कारण यह है कि पहली स्थिति में धागे के दोनों ओर फिल्म होने से धागे के प्रत्येक बिन्दु पर बराबर परन्तु विपरीत बल कार्य करते हैं जिससे धागा किसी भी स्थिति में साम्यावस्था में पड़ा रहता है।



चित्र-9.

परन्तु दूसरी स्थिति में फन्दे के अन्दर की फिल्म टूटते ही धागे पर भीतरी बल समाप्त हो जाता है। अब केवल बाहर की फिल्म में तनाव के कारण धागे के प्रत्येक बिन्दु पर केवल बाहर की दिशा में धागे की लम्बाई के लम्बवत् बल कार्य करता है। अत: धागे का फन्दा वृत्ताकार आकृति लेता है।

प्रश्न 19. पृष्ठ तनाव को प्रभावित करने वाले कारकों की व्याख्या कीजिये।

उत्तर– द्रव के पृष्ठ तनाव पर निम्नलिखित बातों का प्रभाव पड़ता है–

(1) ताप का प्रभाव (Effect of temperature)– ताप बढ़ने से ससंजक बल का मान घट जाता है जिसके फलस्वरूप पृष्ठ तनाव घट जाता है। क्रान्तिक ताप पर पृष्ठ तनाव शून्य होता है।

(2) संदूषण का प्रभाव (Effect of contamination)– यदि द्रव के तल पर धूल, कोई चिकनाई, जैसे ग्रीस या तेल हो, तो इससे द्रव का पृष्ठ तनाव घट जाता है।

(3) विलेय का प्रभाव (Effect of solute)– प्रयोगों से ज्ञात होता है कि जल का पृष्ठ तनाव उसमें घोले गये पदार्थ व उसकी घुलनशीलता पर निर्भर करता है। उदाहरण के लिए, जल में नमक घोलने पर जल का पृष्ठ तनाव बढ़ जाता है। इसके विपरीत जल में साबुन घोलने पर जल का पृष्ठ तनाव घट जाता है।

प्रश्न 20. एक तार के छल्ले पर 3 सेमी. की साबुन की फिल्म बनी है। यदि फिल्म का आकार 3 सेमी $\times$ 4 सेमी. कर दिया जाये तो इस क्रिया में किये गये कार्य की गणना कीजिये। साबुन के घोल का पृष्ठ तनाव 3×10^{-2} न्यूटन/मीटर है।

उत्तर– आयताकार छल्ले पर बनी साबुन की फिल्म में दो मुक्त पृष्ठ होंगे। अत: इस प्रक्रिया में फिल्म के पृष्ठीय क्षेत्रफल में कुल वृद्धि–

$\Delta A = 2 \times (3 \times 4 - 3 \times 3)$ सेमी²

$= 6$ सेमी²

$= 6 \times 10^{-4}$ मीटर²

$\therefore$ कार्य $W = T \times \Delta A$

(जहाँ $T =$ पृष्ठ तनाव $= 3 \times 10^{-2}$ न्यूटन/मीटर)

$\therefore W = (3 \times 10^{-2}$ न्यूटन/मीटर$) \times (6 \times 10^{-4}$ मीटर²$)$

$= 1.8 \times 10^{-5}$ जूल

प्रश्न 21. जल की 1000 छोटी बूंदों को मिलाकर एक बड़ी बूंद बनाई जाती है। पृष्ठ ऊर्जा में क्या परिवर्तन होगा? 1000 बूंदों की कुल पृष्ठ ऊर्जा तथा बड़ी बूंद की पृष्ठ ऊर्जा में क्या अनुपात होगा?

उत्तर– माना बड़ी बूँद की त्रिज्या R तथा छोटी बूँद की त्रिज्या r है। जल की 1000 छोटी बूँदों का आयतन = जल की बड़ी बूँद का आयतन

$$1000 \times \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow r = \frac{R}{10}$$

1000 छोटी बूंदों की पृष्ठ ऊर्जा

$W_1 = 1000 \times T \times 4\pi r^2$

$= 1000 \times T4\,\pi(R/10)^2$

$= 10(T \times 4\pi R^2)$

1 बड़ी बूँद की पृष्ठ ऊर्जा

$W_2 = T \times 4\pi R^2$

(यहाँ $T =$ जल का पृष्ठ तनाव)

अत: स्पष्ट है कि $W_2 < W_1$ अर्थात् पृष्ठ ऊर्जा घट जायेगी।

$$\therefore \frac{W_1}{W_2} = \frac{10(T \times 4\pi R^2)}{T \times 4\pi R^2} = \frac{10}{1}$$

अर्थात् $W_1 : W_2 = 10:1$

प्रश्न 22. साबुन के घोल का पृष्ठ तनाव 0.03 न्यूटन/मीटर है। इस घोल से 1 सेमी. त्रिज्या के बुलबुले को फूंक कर बनाने में कितना कार्य करना होगा?

उत्तर– पृष्ठ तनाव $T = 0.03$ न्यूटन/मीटर तथा त्रिज्या $R = 1$ सेमी $= 10^{-2}$ मीटर

चूँकि साबुन के घोल के बुलबुले में 2 मुक्त पृष्ठ होते हैं। अत: घोल से R मीटर त्रिज्या का बुलबुला फूँककर बनाने में इसके पृष्ठीय क्षेत्रफल में कुल वृद्धि $\Delta A = 2(4\pi R^2) = 8\pi R^2$

अत: इसको बनाने में किया गया कार्य

$W = T \times \Delta A = T \times 8\,\pi R^2$

$W = (0.03$ न्यूटन/मीटर$)$

$\times [8 \times 3.14 \times (10^{-2}$ मी$)^2]$

$= 7.53 \times 10^{-5}$ न्यूटन-मीटर

$= 7.53 \times 10^{-5}$ जूल

प्रश्न 23. 3 mm त्रिज्या की किसी पारे की बूंद के भीतर कमरे के ताप पर दाब क्या है? 20°C ताप पर पारे का पृष्ठ तनाव 4.65×10^{-1} न्यूटन-मीटर$^{-1}$ है। यदि वायुमण्डलीय दाब 1.01×10^5 Pa है तो पारे की बूंद के भीतर दाब-आधिक्य भी ज्ञात कीजिए।

उत्तर– दिया है, त्रिज्या $r = 3.00$ मिमी

$= 3.00 \times 10^{-3}$ मी

वायुमण्डलीय दाब

$P_0 = 1.01 \times 10^5$ Pa

20°C पर पारे का पृष्ठ-तनाव

$T = 4.65 \times 10^{-1}$ न्यूटन-मीटर$^{-1}$

पारे की बूँद के भीतर-दाब-आधिक्य

$$P_{ex} = \frac{2T}{\gamma}$$

$$= \frac{2 \times 4.65 \times 10^{-1} \text{ न्यूटन मीटर}^{-1}}{3.00 \times 10^{-3} \text{ मीटर}}$$

$= 3.0 \times 10^2$ Pa

जबकि बूँद के बाहर वायुमण्डलीय दाब है।

$\therefore$ बूँद के भीतर दाब

$P = P_0 + P_{ex}$

$= 1.01 \times 10^5 \text{ Pa} + 3.1 \times 10^2 \text{ Pa}$

$= 1.013 \times 10^5$ Pa

प्रश्न 24. श्यानता क्या है? श्यानता के गुण तथा श्यानता पर ताप का प्रभाव बतायें।

उत्तर– श्यानता– "द्रव के विभिन्न परतों के बीच कार्य करने वाले आन्तरिक घर्षण बल को श्यान बल कहते हैं। श्यानता द्रव का गुण है जिसके कारण जब द्रव गति करता है तो उसकी विभिन्न परतों के बीच आन्तरिक घर्षण बल लगता है जो द्रव की परतों के बीच आपेक्षिक गति का विरोध करता है।" द्रव की विभिन्न परतों के बीच कार्य करने वाले आन्तरिक घर्षण का कारण द्रव के अणुओं के बीच कार्य

करने वाला ससंजक बल कहलाता है। पतले द्रवों (पानी) की अपेक्षा गाढ़े द्रव (कोलतार, ग्लिसरीन, शहद इत्यादि) में अधिक श्यानता का यही कारण है कि बिलोकर छोड़ देने पर ग्लिसरीन जल की अपेक्षा जल्दी ठहर जाती है। यदि हम फर्श पर कोलतार गिरा दें तो वह शीघ्र ही ठहर जायेगा, परन्तु जल काफी दूर तक बहता चला जायेगा। श्यानता के गुण निम्न हैं-

1. यदि हम शहद व मिट्टी के तेल को कीप में अलग-अलग डालें तो मिट्टी का तेल बहुत शीघ्र कीप के छेद से होकर बाहर निकल जाता है। परन्तु शहद बहुत देर में निकल पाती है, क्योंकि शहद में मिट्टी की तेल की अपेक्षा अधिक श्यानता होने से कीप से निकलते समय उसकी विभिन्न परतों के बीच होने वाले आपेक्षिक गति का बहुत अधिक आन्तरिक विरोध होता है।

2. बादल के कण वायु की श्यानता के कारण बहुत धीरे-धीरे नीचे आ पाते हैं तथा वे आकाश में तैरते हुए प्रतीत होते हैं।

3. जितना तेज हम वायु में दौड़ सकते हैं उतना तेज जल में नहीं दौड़ सकते। इसका कारण यह है कि वायु की तुलना में जल की श्यानता बहुत अधिक होती है।

श्यानता पर ताप का प्रभाव– ताप बढ़ने में द्रवों की श्यानता घट जाती है। परन्तु गैसों की श्यानता बढ़ जाती है।

प्रश्न 25. श्यानता गुणांक की परिभाषा लिखें। इसकी विमा तथा मात्रक बतायें।

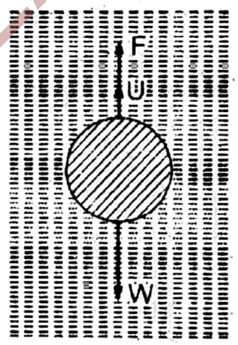
उत्तर– श्यानता गुणांक (Coefficient of viscosity)– किसी द्रव का श्यानता गुणांक, उस द्रव के अन्दर एकांक क्षेत्रफल वाली दो पर्तों के बीच उस स्पर्श रेखीय बल के बराबर होता है जो इनके बीच एकांक वेग प्रवणता के लिए आवश्यक होता है। इस सूत्र में दोहरे चिन्ह (±) का अर्थ यह है कि बल F बहते हुए द्रव की दो पर्तों के बीच एक अन्योन्य बल है। किसी भी पर्त पर उससे ऊपर वाले द्रव के वेग की दिशा में तथा उसके बीच वाले पर्त वेग की दिशा के विपरीत दिशा में बल लगाती है।

* श्यानता गुणांक की विमा = $[ML^{-1}T^{-1}]$

* M.K.S पद्धति में श्यानता गुणांक का मात्रक (किग्रा./मीटर-सेकण्ड) होता है। श्यानता गुणांक का प्रचलित मात्रक प्वाइज (Poise) होता है।

प्रश्न 26. सीमान्त वेग (Terminal velocity) को चित्र सहित समझाइये।

उत्तर– सीमान्त वेग (Terminal Velocity)– जब कोई गोलाकार पिण्ड किसी श्यान माध्यम (द्रव अथवा गैस) में उसकी सतह पर छोड़ा जाता है तो वह पिण्ड स्वयं के भार W के कारण माध्यम में नीचे की ओर गति करने लगता है परन्तु माध्यम में प्रवेश करने पर, आर्किमिडीज के सिद्धान्त के अनुसार उस पर एक उत्क्षेप बल (U) ऊपर की ओर कार्य करता है। अतः उस पर एक नेट प्रभावी बल (W–U) ऊर्ध्वाधरतः नीचे की ओर कार्य करता है जिसके फलस्वरूप पिण्ड बढ़ते हुए वेग से त्वरित गति प्रारम्भ करता है। परन्तु द्रव के अन्दर गिरती वस्तु इसकी विभिन्न पर्तों के बीच आपेक्षिक गति उत्पन्न कर देती है, क्योंकि पिण्ड के द्रव में गिरने पर द्रव की परत जो इसके सम्पर्क में है, इसके वेग से गति करना चाहती है तथा दूर स्थित अन्य पर्तें स्थिर ही रहती हैं। इसलिए परिणामस्वरूप एक श्यान बल F कार्य करने लगता है जो पिण्ड की गति के विपरीत दिशा में कार्य करता है। यह श्यान बल स्टोक्स के नियम के अनुसार निम्न सूत्र से व्यक्त किया जाता है।



चित्र-10.

$$F = 6\pi\eta rv$$

जहाँ η = द्रव का श्यानता गुणांक,
r = गोलाकार पिण्ड की त्रिज्या,
v = पिण्ड का वेग।

इस सूत्र से स्पष्ट है कि पिण्ड के नीचे की ओर बढ़ते वेग के साथ-साथ इस बल का मान भी बढ़ता जाता है तथा एक स्थिति ऐसी आती है जब इस बल का मान पिण्ड पर नीचे की ओर कार्य करने वाले प्रभावी बल (W-U) के बराबर हो जाता है। इस दशा में पिण्ड द्रव में एक नियत वेग से नीचे की ओर गति करता है। यह नियत वेग ही पिण्ड का अन्तिम वेग अथवा सीमान्त वेग कहलाता है। इसको v_T से प्रदर्शित करते हैं।

"अतः किसी पिण्ड का सीमान्त वेग उसका वह अधिकतम नियत वेग है जो कोई गोलाकार पिण्ड किसी श्यान तरल में गिरते समय प्राप्त करता है।"

प्रश्न 27. स्टोक के नियम (stokes law) का विस्तारपूर्वक वर्णन कीजिए। यह नियम किन परिस्थितियों में लागू हो सकता है।

उत्तर– स्टोक का नियम (Stokes law)– जब कोई वस्तु किसी श्यान माध्यम में गिरती है तो यह अपने सम्पर्क में आयी द्रव की पर्त को नीचे धकेलती है। इसलिए द्रव की विभिन्न पर्तों के बीच आपेक्षिक गति उत्पन्न हो जाती है। इसके परिणामस्वरूप गैस का द्रव में (श्यान माध्यम में) गिरती हुई वस्तु एक श्याल बल का अनुभव करती है जिसके कारण वस्तु की गति अवमन्दित हो जाती है।

वैज्ञानिक स्टोक्स ने विभिन्न तरलों (द्रव तथा गैस) में छोटी गोलीय वस्तुओं की गति के सम्बन्ध में अनेक प्रयोग किये। इन प्रयोगों से प्राप्त निष्कर्षों के आधार पर वैज्ञानिक स्टोक्स ने बताया कि η श्यानता गुणांक वाले द्रव में गिरती हुई r त्रिज्या की छोटी गोली पर कार्य करने वाला श्यान बल निम्नलिखित बातों पर निर्भर करता है–

(*i*) तरल द्रव के श्यानता गुणांक η पर (*ii*) गोली के वेग v पर, (*iii*) गोली की त्रिज्या r पर

विमीय विश्लेषण के आधार पर F का सूत्र निम्न प्रकार प्राप्त किया गया–

माना $F \propto \eta^a r^b v^c \Rightarrow F = k\,\eta^a r^b v^c$ ...(1)

जहाँ k = विमाहीन नियतांक

समीकरण (1) को विमीय रूप में लिखने पर–

$$[MLT^{-2}] = [ML^{-1}T^{-1}]^a\,[L]^b\,[LT^{-1}]^c$$
$$= [M^aL^{-a+b+c}\,T^{-a-c}]$$

दोनों पक्षों में $M\,L$ तथा T की विमाओं की तुलना करने पर

$a = 1$ ...(2)

$-a+b+c = 1$ ...(3)

तथा $-a-c = -2$ ...(4)

समीरकण (2), (3) तथा (4) को हल करने पर–

$a = 1 = b = 1$, तथा $c = 1$

ये मान समीकरण (1) में रखने पर

$F = k\eta rv$

प्रयोग द्वारा नियतांक k का मान 6π पाया गया।

अतः श्यानबल $F = 6\pi\eta rv$ ...(5)

यह सम्बन्ध ही स्टोक्स का नियम कहलाता है।

अतः स्टोक्स के नियम के अनुसार यदि r त्रिज्या की एक छोटी गोली η श्यानता गुणांक वाले समांग तथा अनन्त विस्तार के श्यान माध्यम में नियत वेग v से गति करती है तो उसके ऊपर गति की विपरीत दिशा में कार्य करने वाला श्यान बल'' निम्न सूत्र से व्यक्त किया जाता है–

$$F = 6\pi\eta rv$$

यह सूत्र केवल निम्नलिखित परिस्थितियों में ही लागू होता है–

(*i*) गोली बहुत छोटी होनी चाहिए।

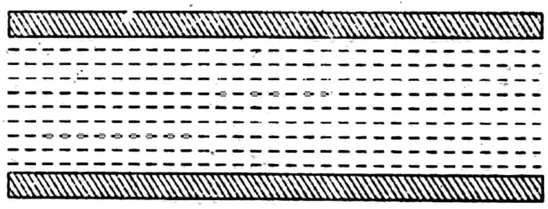
(*ii*) गोली दृढ़ तथा उसकी सतह घर्षण रहित होनी चाहिए।

(*iii*) गोली का वेग माध्यम में द्रव-प्रवाह के क्रान्तिक वेग से कम होना चाहिए।

(*iv*) माध्यम अनन्त, समांगी (homogeneous) तथा श्यान (viscous) होना चाहिए।

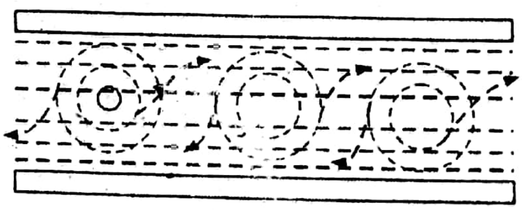
प्रश्न 28. धारा रेखीय प्रवाह एवं विक्षुब्ध प्रवाह को चित्र की सहायता से समझाइये।

उत्तर– धारारेखीय प्रवाह (stream line flow)– जब कोई द्रव इस प्रकार बहता है कि किसी एक ही बिन्दु से गुजरने वाले द्रव के सभी कण एक ही मार्ग पर चलते हैं, अर्थात् पीछे आने वाले कण आगे जाने वाले कणों का अनुसरण करते हैं, तो द्रव के ऐसे प्रवाह को धारा रेखीय प्रवाह कहते हैं तथा उस मार्ग को धारा रेखा कहते हैं। स्मरणीय है कि किसी तरल का प्रवाह तब तक धारा रेखीय बना रहता है जब तक उसका वेग एक सुपरिभाषित निश्चित वेग से कम रहता है। इस निश्चित वेग को क्रान्तिक वेग कहते हैं।



चित्र-11.

विक्षुब्ध प्रवाह (Turbulent flow)– जब तरल का वेग क्रान्तिक वेग से अधिक हो जाता है तो प्रवाह, धारा-रेखीय नहीं रहता और तरल की गति टेढ़ी-मेढ़ी एवं अनियमित हो जाती है। इस प्रकार के प्रवाह को विक्षुब्ध प्रवाह कहते हैं। इस गति में प्रायः भंवर धारायें बढ़ने लगती हैं। बरसात में उमड़ती उफनती नदियाँ विक्षुब्ध प्रवाह के ही उदाहरण हैं। विक्षुब्ध प्रवाह का मुख्य लाक्षणिक गुण यह है कि तरल के किसी बिन्दु पर वेग का मान व दिशा हर क्षण बदलते रहते हैं।



चित्र-12.

प्रश्न 29. रेनॉल्ड संख्या (Reynold number) को विस्तार पूर्वक समझाते हुए महत्व की भी विवेचना कीजिये।

उत्तर– रेनॉल्ड संख्या (Reynold number)– सन् 1883 ई. में प्रो. ऑसबार्न रेनॉल्ड (Osborne Reynold) ने केशिका नली में द्रवों के प्रवाह का क्रान्तिक वेग v_c

(*i*) द्रव के घनत्व (ρ) के व्युत्क्रमानुपाती होता है अर्थात् $v_c \propto 1/\rho$

(*ii*) केशिका नली के व्यास d के व्युत्क्रमानुपाती है अर्थात् $v_c \propto \frac{1}{d}$

(*iii*) द्रव के श्यानता गुणांक (η) के अनुक्रमानुपाती होता है, अर्थात् $v_c \propto \eta$

अत: तीनों सम्बन्धों को एक साथ लिखने पर,

अथवा $$v_c \propto \frac{\eta}{\rho d}$$

अथवा $$v_c = \frac{R_e \eta}{\rho d} \quad ...(1)$$

जहाँ R_e रेनॉल्ड संख्या कहलाती है।

अत: रेनॉल्ड संख्या $$R_e = \frac{v_c \rho d}{\eta} \quad ...(2)$$

उपरोक्त सूत्र (2) को पुनर्व्यवस्थित करके निम्न रूप में भी लिखा जा सकता है–

$$R_e = \frac{\rho . A v_c^2}{\left(\frac{\eta A v_c}{d}\right)} \quad ...(3)$$

यहाँ A = नली का अनुप्रस्थ परिच्छेद

यहाँ $\rho A v_c^2$ को जड़त्वीय बल तथा $\frac{\eta A v_c}{d}$ को श्यान बल कहते हैं।

अत: रेनॉल्ड संख्या $$R_e = \frac{\text{जड़त्वीय बल}}{\text{श्यान बल}}$$

अर्थात् जड़त्वीय बल (अर्थात् तरल के प्रवाह मार्ग के अवरोध का जड़त्व) तथा श्यान बल का अनुपात रेनॉल्ड संख्या कहलाती है।

विशेष-(1) रेनॉल्ड संख्या विमाहीन होती है।

$$R_e = v_c \rho d / \eta$$

अत: R_e की विमाएँ $= [LT^{-1}] \times [ML^{-3}] \times [L]/[ML^{-1}T^{-1}]$

$= [M^0 L^0 T^0]$

= विमाहीन राशि

(2) रेनॉल्ड संख्या दर्शाती है–

(*i*) किसी द्रव के लिए रेनॉल्ड संख्या का मान 2000 से कम है तो उसका प्रवाह स्तरीय (laminar) या धारा-रेखीय (stream lined) होता है।

(*ii*) यदि रेनॉल्ड संख्या का मान 3000 से अधिक है तो द्रव-प्रवाह विक्षुब्ध (turbulent) होता है।

(*iii*) यदि रेनॉल्ड संख्या का मान 2000 और 3000 के बीच होता है तो द्रव का प्रवाह अस्थिर (unstable) होता है और कभी धारा-रेखीय और कभी विक्षुब्ध हो सकता है।

(3) रेनॉल्ड संख्या का महत्व– उपरोक्त सूत्र (2) से स्पष्ट है कि-

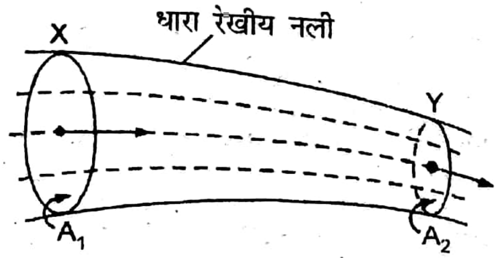
(*i*) यदि कम घनत्व (d कम) और अधिक श्यानता (η अधिक) वाला द्रव किसी पतली (d कम) नली में होकर प्रवाहित होता है तो उस द्रव के लिए क्रान्तिक वेग का मान काफी अधिक हो सकता है जिसे वह द्रव प्राप्त ही न कर पाए। अत: ऐसे द्रव का प्रवाह धारा-रेखीय होता है।

(*ii*) यदि अधिक घनत्व और कम श्यानता वाला द्रव किसी चौड़ी (d अधिक) नली में से प्रवाहित होता है तो उसके क्रान्तिक वेग का मान कम होगा, जिसे वह द्रव आसानी से शीघ्र ही प्राप्त कर लेगा। अत: ऐसे द्रव का प्रवाह विक्षुब्ध होता है।

(4) बहुत पतली केशिका नली (capillary tube) मे से प्रवाहित द्रव की रेनॉल्ड संख्या लगभग 1000 होती है।

प्रश्न 30. द्रवों के बहने का सांतत्य समी॰ या अविरतता के सिद्धान्त का उल्लेख करते हुए सिद्ध कीजिये। (2016(s))

उत्तर– सांतत्य समीकरण (Equation of Continuity) या अविरतता का सिद्धान्त (Principle of Continuity) – " यदि कोई असम्पीड्य (incompressible) तथा अश्यान (non-viscous) द्रव किसी असमान अनुप्रस्थ काट वाली नली में धारा-रेखीय प्रवाह में बह रहा हो तो नली में प्रत्येक स्थान पर नली के अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफल तथा द्रव के वेग का गुणनफल नियत रहता है। इसको ही अविरतता का सिद्धान्त कहते हैं।"



चित्र-13.

सिद्ध करना— मान लीजिए कि एक असम्पीड्य तथा अश्यान द्रव एक असमान अनुप्रस्थ काट की नली XY में होकर बह रहा है। माना कि नली के X व Y सिरों पर अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफल क्रमशः A_1 व A_2 हैं तथा द्रव का वेग v_1 व v_2 है। चित्र-13। माना कि द्रव का घनत्व ρ है। सिरे X से प्रवेश करने वाला द्रव एक सेकण्ड में v_1 दूरी तय करता है। अतः एक सेकण्ड में सिरे X पर क्षेत्रफल A_1 से गुजरने वाले द्रव का आयतन $= A_1 \times v_1$

$\therefore$ 1 सेकण्ड में सिरे X से गुजरने वाले द्रव का द्रव्यमान

$$= \rho \times A_1 \times v_1$$

इसी प्रकार, 1 सेकण्ड में सिरे Y से गुजरने वाले द्रव का द्रव्यमान

$$= \rho \times A_2 \times v_2$$

अब, क्योंकि सिरे X में जो भी द्रव नली में प्रवेश करता है वह दूसरे सिरे Y से नली से बाहर निकल जाता है, उपर्युक्त दोनों द्रव्यमान बराबर हैं,

$\therefore \quad \rho \times A_1 \times v_1 = \rho \times A_2 \times v_2$

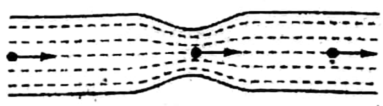
अथवा $\quad A_1 \times v_1 = A_2 \times v_2$

या $\quad A \times v =$ नियतांक

समीकरण $A_1 v_1 = A_2 v_2$ अर्थात् $Av =$ नियतांक को अविरतता का सिद्धान्त भी कहते हैं तथा असम्पीड्य तरल प्रवाह में यह संहति संरक्षण का कथन है। Av आयतन अभिवाह अर्थात् द्रव प्रवाह की दर देता है।

स्पष्ट है कि नली में प्रत्येक स्थान पर नली की अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफल तथा द्रव के वेग का गुणनफल एक नियतांक होता है।

इस समीकरण से यह भी निष्कर्ष निकलता है कि द्रव का वेग नली के चौड़े भागों में कम तथा संकीर्ण भागों में अधिक होता है। चित्र. 14 में नली के चौड़े भाग में धारा-रेखाएँ दूर-दूर तथा संकीर्ण भाग में पास-पास दिखायी गयी हैं। दूर-दूर स्थित धारा-रेखाएँ द्रव के कम वेग के क्षेत्र तथा पास-पास स्थित धारा-रेखाएँ अधिक वेग के क्षेत्र को व्यक्त करती हैं।



चित्र-14

प्रश्न 31. बरनौली के प्रमेय का उल्लेख करते हुए सूत्र की व्युत्पत्ति कीजिये। (2010, 2016 (s))

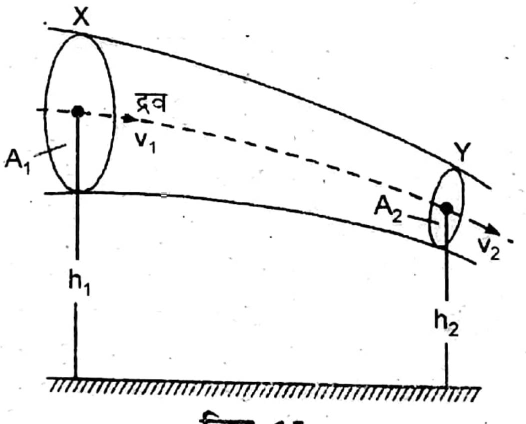
उत्तर—बरनौली का प्रमेय (Bernoulli's theorem) — यदि कोई असम्पीड्य एवं अश्यान द्रव धारा-रेखीय प्रवाह में एक स्थान से दूसरे स्थान तक बहता है, तो इसके मार्ग के प्रत्येक बिन्दु पर एकांक आयतन के लिए दाब ऊर्जा, गतिज ऊर्जा तथा स्थितिज ऊर्जा का योग एक नियतांक होता है।''

अर्थात् $P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h =$ नियतांक

बरनौली का प्रमेय एक प्रकार से बहने वाले द्रव (अथवा गैस) के लिए ऊर्जा संरक्षण का सिद्धान्त है।

इस समीकरण में प्रत्येक पद की विमा, दाब की विमा $[ML^{-1}T^{-2}]$ होती है। अतः इसमें राशि $(P + \rho g h)$ को स्थैतिक दाब (static pressure) तथा राशि $\frac{1}{2}\rho v^2$ को गतिक दाब (dynamic pressure) कहते हैं।

उपपत्ति—चित्र में दिखायी गयी नली XY से कोई असम्पीड्य तथा अश्यान द्रव धारा-रेखीय प्रवाह में बह रहा है। माना नली के X सिरे का क्षेत्रफल A_1 तथा Y सिरे का A_2 है। नली के सिरे X व Y की पृथ्वी तल से माध्य ऊँचाई क्रमशः h_1 तथा h_2 हैं। X पर दाब P_1 तथा Y पर दाब P_2 है। नली के सिरे X पर द्रव का वेग v_1 तथा सिरे Y पर वेग v_2 है।



चित्र-15.

चूँकि A_2 का मान A_1 से कम है, अतः अविरतता के सिद्धान्त के अनुसार, v_2 का मान v_1 से अधिक होगा।

जो द्रव X सिरे से प्रवेश करता है वह एक सेकण्ड में v_1 दूरी तय कर लेता है। इस द्रव पर एक बल $P_1 \times A_1$ (दाब × क्षेत्रफल) कार्य कर रहा है। अतः 1 सेकण्ड में X सिरे पर प्रवेश करने वाले द्रव पर किया गया कार्य = बल × दूरी = $P_1 \times A_1 \times v_1$

इसी प्रकार Y सिरे से निकलने वाला द्रव, बल $P_2 \times A_2$ के विरूद्ध कार्य करता है तथा 1 सेकण्ड में v_2 दूरी तय कर लेता है। अतः 1 सेकण्ड में Y सिरे से निकलने वाले द्रव द्वारा किया गया कार्य

$$= P_2 \times A_2 \times v_2$$

∴ द्रव पर प्रति सेकण्ड किया गया नेट कार्य

$$= (P_1 \times A_1 \times v_1) - (P_2 \times A_2 \times v_2) \quad \ldots (1)$$

परन्तु $A_1 \times v_1$ तथा $A_2 \times v_2$ क्रमशः 1 सेकण्ड में सिरे X पर प्रवेश करने वाले तथा सिरे Y से निकलने वाले द्रव के आयतन हैं जो आपस में बराबर होंगे।

इस प्रकार $A_1 \times v_1 = A_2 \times v_2 = \dfrac{m}{\rho}$

जहाँ m एक सेकण्ड में सिरे X पर प्रवेश करने वाले अथवा Y से निकलने वाले द्रव का द्रव्यमान तथा ρ द्रव का घनत्व है।

यह मान समीकरण (1) में रखने पर

द्रव पर प्रति सेकण्ड किया गया नेट कार्य

$$= (P_1 - P_2)\frac{m}{\rho} \quad \ldots (2)$$

एक सेकण्ड में सिरे X पर प्रवेश करने वाले द्रव की गतिज ऊर्जा $= \dfrac{1}{2}mv_1^2$

एक सेकण्ड में सिरे Y से निकलने वाले द्रव की गतिज ऊर्जा $= \dfrac{1}{2}mv_2^2$

∴ प्रति सेकण्ड द्रव की गतिज ऊर्जा में वृद्धि

$$= \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

सिरे X पर द्रव की स्थितिज ऊर्जा $= mgh_1$ तथा सिरे Y पर द्रव की स्थितिज ऊर्जा $= mgh_2$

∴ द्रव की स्थितिज ऊर्जा में कमी $= mg(h_1 - h_2)$

अतः प्रति सेकण्ड द्रव की ऊर्जा में नेट वृद्धि

$$= \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) - mg(h_1 - h_2) \quad \ldots (3)$$

ऊर्जा में यह नेट वृद्धि द्रव पर किये गये नेट कार्य के बराबर होती है। अर्थात् द्रव पर किया गया नेट कार्य = द्रव की ऊर्जा में नेट वृद्धि अतः समीकरण (2) व समीकरण (3) से

$$(P_1 - P_2)\frac{m}{\rho} = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) - mg(h_1 - h_2)$$

अथवा $P_1 - P_2 = \dfrac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) - \rho g(h_1 - h_2)$

अथवा $P_1 + \dfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \dfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$

अथवा $P + \dfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h =$ नियतांक ...(4)

यही बरनौली प्रमेय का समीकरण है।

प्रश्न 32. बरनौली प्रमेय के अनुप्रयोगों की व्याख्या कीजिये। (2010)

उत्तर– बरनौली प्रमेय के अनुप्रयोग निम्नलिखित में देखने को मिलते हैं।

1. वेन्चुरीमीटर
2. बुन्सन बर्नर
3. कणित्र (Automizer)
4. फिल्टर पम्प
5. फूंक मारने के स्थान पर दाब कम हो जाता है।
6. फव्वारे से निकलते हुए पानी के जेट के सहारे छोड़ी गई हल्के गेंद टिकी रहती है।
7. तेज आंधी चलने पर टिन शेड प्रायः उड़ जाते हैं।
8. मैग्नस का प्रभाव
9. वायुयान के पंख की आकृति
10. पायलट ट्यूब
11. गहरा जल सदैव शान्त रहता है।
12. समुद्र में एक ही दिशा में समान्तर गति करते हुए दो जलयानों के पार्श्व परस्पर निकट आ जाने पर वे टकरा सकते हैं।

प्रश्न 33. एक व्यक्ति का द्रव्यमान 20 किग्रा॰ है तथा उसके पैर के तलवे का क्षेत्रफल 0.01 मीटर^2 है। यदि $g = 10$ मीटर/सेकण्ड^2 हो, तो फर्श पर लगने वाले दाब की गणना कीजिए–

(*i*) जब व्यक्ति एक पैर पर खड़ा हो, (*ii*) जब व्यक्ति दोनों पैर पर खड़ा हो।

उत्तर– (*i*) एक पैर पर खड़े व्यक्ति के तलवे का क्षेत्रफल = 0.01 मीटर^2

व्यक्ति का भार $= mg = 20$ किग्रा × 10 मी/से^{2}

= 200 न्यूटन

∴ फर्श पर लगने वाला दाब

$$= \frac{200 \text{ न्यूटन}}{0.01 \text{ मी}^2}$$

$= 2 \times 10^4$ न्यूटन/मीटर^2

(*ii*) दोनों पैरों पर खड़े मनुष्य के तलवों का क्षेत्रफल

$= 2 \times 0.01$ मीटर^2 $= 0.02$ मीटर^2

फर्श पर लगने वाला दाब

$$= \frac{\text{बल}}{\text{क्षेत्रफल}} = \frac{200 \text{ न्यूटन}}{0.02 \text{मी}^2}$$

$= \mathbf{10^4}$ **न्यूटन/मीटर^2**

प्रश्न 34. एक गोताखोर समुद्र में 30 मीटर की गहराई पर तैर रहा है। उस पर लगने वाला कुल दाब कितने वायुमण्डल दाब के बराबर होगा? (समुद्री जल का घनत्व = 1000 किग्रा०/ मीटर^3, एक वायुमण्डलीय दाब = 1×10^5 न्यूटन/ मीटर^2)।

उत्तर– जल दाब $= hdg$

$= 30 \times 1000 \times 10$ न्यूटन /मी^{2}

$= 300000$ न्यूटन/मी^{2}

$= 3.0 \times 10^5$ न्यूटन/मी^{2}

$$= \frac{3.0 \times 10^5}{1.0 \times 10^5} \text{ वायुमण्डलीय दाब}$$

($\because$ 1 वायुमण्डलीय दाब $= 1.0 \times 10^5$ न्यूटन/मी^{2})

$= 3$ वायुमण्डलीय दाब।

गोताखोर पर लगने वाला कुल दाब = वायुमण्डलीय दाब + जल दाब

$= 1$ वायुमण्डलीय दाब $+ 3$ वायुमण्डलीय दाब

$= \mathbf{4}$ **वायुमण्डलीय दाब**

प्रश्न 35. 100 वर्ग सेमी० क्षेत्रफल की एक समतल प्लेट तथा एक बड़ी ग्लिसरीन की 1 मिमी० मोटी परत है। यदि ग्लिसरीन का श्यानता गुणांक 1 किग्रा०-मी०/सेकण्ड हो, तो प्लेट को 7 सेमी०/सेकण्ड वेग से चलाने के लिए कितना बल चाहिए?

उत्तर– प्लेट को एक निश्चित वेग से चलाने के लिए आवश्यक बल; प्लेट पर कार्यशील श्यान बल F के बराबर होगा।

परन्तु श्यान बल $F = \eta A \left(\frac{\Delta v_x}{\Delta z} \right)$

यहाँ क्षेत्रफल $A = 100$ वर्ग सेमी $= 10^{-2}$ मीटर^2, श्यानता गुणांक $\eta = 1.0$ किग्रा/मी-से,

$\Delta v_x = 7.0$ सेमी/सेकण्ड $= 7.0 \times 10^{-2}$ मीटर/से तथा

$\Delta z = 1.0$ मिमी $= 10^{-3}$ मीटर

$$F = (1.0) \times (10^{-2}) \left(\frac{7.0 \times 10^{-2}}{10^{-3}} \right) \text{ न्यूटन}$$

$= \mathbf{0.70}$ **न्यूटन**

प्रश्न 36. वर्षा की समान आकार की 8 बूंदें वायु में ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर सीमान्त वेग 0.10 मी/से० से गिर रही हैं। यदि ये बूंदें परस्पर मिलकर एक बड़ी बूंद बना दें तो इसका सीमान्त वेग क्या होगा?

उत्तर– माना छोटी बूंद की त्रिज्या r तथा बड़ी बूंद की त्रिज्या R

$\therefore$ बड़ी बूंद का आयतन $= 8$ छोटी बूंदों का आयतन

$$\therefore \quad \frac{4}{3}\pi R^3 = 8 \times \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow R = 2r$$

किसी बूंद का सीमान्त वेग

$$v_T = \frac{2(\rho - \sigma) r^2 g}{9\eta}$$

इसमें एक ही पदार्थ की गोलियां (अर्थात् जल की बूंदें); समान श्यान माध्यम (वायु) तथा एक ही स्थान के लिए राशि $\frac{2(\rho - \sigma) g}{9\eta}$ = नियतांक

$$\therefore \quad v_T \propto r$$

अतः यदि छोटी बूंद का सीमान्त वेग $(v_T)_1$ तथा बड़ी बूंद का सीमान्त वेग $(v_T)_2$ हो तो–

$$\frac{(v_T)_2}{(v_T)_1} = \left(\frac{\text{बड़ी बूंद की त्रिज्या}}{\text{छोटी बूंद की त्रिज्या}} \right)^2$$

$$= \left(\frac{R}{r} \right)^2 = \left(\frac{2r}{r} \right)^2$$

$\therefore \quad (v_T)_2 = 4(v_T)_1 = 4 \times 0.10$ मी/से

$= \mathbf{0.40}$ **मी/से**

प्रश्न 37. भिन्न-भिन्न व्यास के दो क्षैतिज पाइप एक-दूसरे से जुड़े हैं, जिसमें जल बह रहा है। पहले पाइप में जल के प्रवाह का वेग 4 मीटर प्रति सेकण्ड है तथा दाब 2×10^4 न्यूटन/मी०^2 है। दूसरे पाइप में जल के प्रवाह का वेग तथा दाब की गणना कीजिए। पाइपों के व्यास क्रमशः 3 सेमी० तथा 6 सेमी० है।

उत्तर– पहले पाइप की त्रिज्या r_1 = व्यास/2 = 3 सेमी/2 = 1.5 सेमी

पहले पाइप में पानी का प्रवाह वेग $v_1 = 4$ मी/ सेकण्ड

दूसरे पाइप की त्रिज्या r_2 = व्यास/2 = 6 सेमी/2 = 3 सेमी

$\therefore$ पहले पाइप के अनुप्रस्थ परिच्छेद का क्षेत्रफल

$A_1 = \pi r_1^2 = \pi (1.5 \times 10^{-2})^2$

$= 2.25\, \pi \times 10^{-4}$ मी^{2}

दूसरे पाइप के अनुप्रस्थ परिच्छेद का क्षेत्रफल

$$A_2 = \pi r_2^2 = \pi (3.0 \times 10^{-2})^2$$
$$= 9.00\,\pi \times 10^{-4} \text{ मी}^2$$

माना दूसरे पाइप में जल के प्रवाह का वेग $= v_2$; अतः अविरतता के सिद्धान्तानुसार:

$$A_1 \times v_1 = A_2 \times v_2$$

$$\therefore \quad v_2 = \left(\frac{A_1}{A_2}\right) \times v_1$$

$$= \left(\frac{2.25\pi \times 10^{-4} \text{ मी}^2}{9.00\pi \times 10^{-4} \text{ मी}^2}\right) \times 4 \frac{\text{मी}}{\text{से}}$$

$$= 1.0 \text{ मी/से}$$

क्षैतिज पाइप में जल के प्रवाह के वेग के लिए बरनौली प्रमेय के अनुसार–

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

या
$$P_2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2)$$

परन्तु पहले पाइप में जल का दाब $P_1 = 2.0 \times 10^4$ न्यूटन/मीटर² जल का प्रवाह $v_1 = 4$ मी/से,

उपर्युक्त गणना से दूसरे पाइप में जल के प्रवाह का वेग $v_2 = 1.0$ मी/से एवं जल का घनत्व $\rho = 10^3$ किग्रा/मी³ होता है।

$$\therefore \quad P_2 = 2.0 \times 10^4 + \frac{1}{2} \times 10^3 (4^2 - 1^2)$$
$$= 2.0 \times 10^4 + 0.75 \times 10^4$$
$$= \mathbf{2.75 \times 10^4} \textbf{ न्यूटन/मीटर}^2$$

प्रश्न 38. एक असमान अनुप्रस्थ काट के क्षैतिज पाइप में एक सिरे पर पानी 0.4 मी/सेकण्ड के वेग से प्रवेश करता है तथा दूसरे सिरे से 0.6 मीटर/सेकण्ड के वेग से निकलता है। यदि पहले सिरे पर दाब 1500 न्यूटन/मीटर² हो, तो दूसरे सिरे पर दाब ज्ञात कीजिए। (पानी का घनत्व 10³ किलोग्राम/घनमीटर है।)

उत्तर– क्षैतिज तल पर द्रव प्रवाह के लिए बरनौली प्रमेय के अनुसार–

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

(जहाँ P_1 व P_2 उन स्थानों पर दाब के मान हैं, जहाँ द्रव प्रवाह का वेग क्रमशः v_1 व v_2 है एवं $\rho =$ द्रव का घनत्व)

$$\therefore \quad P_2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 - \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$= P_1 - \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$$

[∵ दिया है कि $v_2 > v_1$]

परन्तु $P_1 = 1500$ न्यूटन/मी², $v_1 = 0.4$ मी/से, $v_2 = 0.6$ मी/से तथा $\rho = 10^3$ किग्रा/मी³

$$\therefore \quad P_2 = 1500 \frac{\text{न्यूटन}}{\text{मीटर}^2} - \frac{1}{2} \times 1 \times 10^3 (0.6^2 - 0.4^2) \frac{\text{न्यूटन}}{\text{मीटर}^2}$$

$$= \left[1500 - \frac{1}{2} \times 10^3 (0.6 + 0.4)(0.6 - 0.4)\right] \frac{\text{न्यूटन}}{\text{मीटर}^2}$$

$$= [1500 - 100] \text{ न्यूटन/मीटर}^2$$

$$= \mathbf{1400} \textbf{ न्यूटन/मीटर}$$

प्रश्न 39. हौज पाइप से जिसका आन्तरिक व्यास 2.1 सेमी॰ है, पानी 1.1 मी॰/सेकण्ड की चाल से प्रवाहित हो रहा है। नोजिल का व्यास क्या होना चाहिए, यदि इससे पानी 4 मी/से॰ की चाल से निकल रहा हो?

उत्तर– द्रवों के प्रवाह सम्बन्धी अविरतता के सिद्धान्त के अनुसार

$$A_1 \times v_1 = A_2 \times v_2$$

अथवा $\pi r_1^2 \times \pi r_2^2 \times v_2$

अथवा $(r_2/r_1)^2 = v_1/v_2$

अथवा $r_2/r_2 = \sqrt{v_1/v_2}$

अथवा $2r_2/2r_1 = \sqrt{v_1/v_2}$

परन्तु $2 \times$ त्रिज्या $=$ व्यास

$$\therefore \quad D_2/D_1 = \sqrt{v_1/v_2}$$

(जहाँ, D व्यास का संकेत है।)

अथवा
$$D_2 = D_1 \sqrt{\left(\frac{v_1}{v_2}\right)}$$

$$= 2.1 \text{ सेमी} \sqrt{\left(\frac{1.1 \text{ मी/से}}{4 \text{ मी/से}}\right)}$$

$$= \left[\frac{2.1}{2}\sqrt{1.1}\right] \text{सेमी}$$

$$= 1.05 \times 1.048 \text{ सेमी}$$

$$= 1.1 \text{ सेमी}$$

7 ऊष्मा एवं ऊष्मागतिकी (Heat and Thermodynamics)

एक शब्दीय उत्तर (ONE WORD ANSWERS)

प्रश्न 1. ऊष्मा चालकता गुणांक का S.I मात्रक लिखिए।

उत्तर– किलो कैलोरी/से. °C मी॰ या जूल/से-°C मी.

प्रश्न 2. ऊष्मा चालकता गुणांक का विमा सूत्र लिखिए।

उत्तर– $MLT^{-3}\,\theta^{-1}$

प्रश्न 3. किस धातु की ऊष्मा चालकता सर्वाधिक होती है?

उत्तर– चांदी की

प्रश्न 4. निम्नलिखित को ऊष्मा चालकता के बढ़ते क्रम में लिखिए- ताँबा, एल्युमीनियम, चांदी।

उत्तर– एल्युमीनियम, ताँबा, चांदी।

प्रश्न 5. ऊष्मा संचरण की किस विधि में माध्यम की आवश्यकता नहीं होती है?

उत्तर– विकिरण में।

प्रश्न 6. ऊष्मीय विकिरण की प्रकृति क्या है?

उत्तर– विद्युत चुम्बकीय प्रकृति।

प्रश्न 7. एक कैलोरी ऊष्मा उत्पन्न करने के लिए कितना कार्य करना पडेगा।

उत्तर– 4.18 जूल

प्रश्न 8. ऊष्मा इंजन क्या है?

उत्तर– वह युक्ति जो ऊष्मा को यान्त्रिक कार्य में बदल दे।

प्रश्न 9. ऊष्मा इंजन के मुख्य भाग क्या हैं?

उत्तर– (*i*) ऊष्मा स्रोत (*ii*) कार्यकारी पदार्थ (*iii*) सिंक

प्रश्न 10. कार्नो इंजन की दक्षता कब 1 होगी?

उत्तर– जब सिंक का ताप 0 K होगा।

अति लघु उत्तरीय प्रश्न (VERY SHORT ANSWER QUESTIONS)

प्रश्न 1. चालन से आप क्या समझते हैं?

उत्तर– चालन (Conduction)– ऊष्मा स्थानान्तरण की वह विधि जिसमें ऊष्मा एक स्थान से दूसरे स्थान तक पदार्थ के कणों के अपने स्थान से हटे बिना पहुँच जाती है, चालन कहलाती है।

प्रश्न 2. संवहन से आप क्या समझते हैं?

उत्तर–संवहन (Convection)– ऊष्मा स्थानान्तरण की उस विधि को जिसमें माध्यम के कण अपना स्थान छोड़कर दूसरे स्थान तक जाते हैं और दूसरे कण उनके स्थान पर आ जाते हैं, संवहन कहते हैं। अत: इस विधि में ऊष्मा संचरण माध्यम के कणों के स्थानान्तरण द्वारा होता है।

प्रश्न 3. विकिरण से आप क्या समझते हैं?

उत्तर– विकिरण (Radiation)– किसी गर्म वस्तु से ऊष्मा विद्युत चुम्बकीय तरंगों के रूप में निकलती है इसे ऊष्मीय विकिरण कहते हैं। सूर्य से पृथ्वी पर ऊष्मा, विकिरण द्वारा ही पहुंचती है।

प्रश्न 4. परिवर्ती एवं स्थायी अवस्था को समझाइये।

उत्तर– परिवर्ती अवस्था (Variable state)– छड़ की वह अवस्था जिसमें परिच्छेद का ताप समय के साथ बढ़ता रहता है, परिवर्ती अवस्था कहलाती है।

स्थायी अवस्था (Steady state)– छड़ की वह अवस्था जिसमें छड़ का कोई भी भाग ऊष्मा का अवशोषण नहीं करता, को स्थायी अवस्था कहते हैं।

प्रश्न 5. ऊष्मा चालकता को परिभाषित कीजिये।

उत्तर– ऊष्मा चालकता– ऐसी अवस्था जिसमें छड़ में ऊष्मा संचरण की दर केवल छड़ के पदार्थ के एक विशिष्ट

गुण पर निर्भर करती है, जिसे छड़ के पदार्थ की ऊष्मा चालकता कहते हैं।

प्रश्न 6. ऊष्मागतिकी निकाय किसको कहते हैं?

उत्तर-- वह निकाय जिसकी अवस्था को दाब, आयतन तथा ताप से परिभाषित किया जा सके, ऊष्मागतिकी निकाय कहलाता है।

प्रश्न 7. ऊष्मा इंजन किसे कहते हैं?

उत्तर– एक ऐसी युक्ति जो ऊष्मीय ऊर्जा के कुछ भाग को कार्य में रूपान्तरित कर सकती है। इस युक्ति को ऊष्मा इन्जन कहते हैं।

प्रश्न 8. ऊष्मागतिकी का शून्यवाँ नियम लिखिए।

उत्तर– यदि दो ऊष्मागतिक निकाय किसी तीसरे ऊष्मागतिकी निकाय के साथ अलग-अलग तापीय साम्य अर्थात् ऊष्मीय साम्य में हैं तो वे परस्पर भी ऊष्मीय साम्य में होंगे।

प्रश्न 9. आन्तरिक ऊर्जा से आप क्या समझते हैं?

उत्तर– किसी ऊष्मायगतिकी निकाय की आन्तरिक ऊर्जा उस निकाय की अवस्था का एक अभिलाक्षणिक गुण है चाहे वह अवस्था किसी भी प्रकार प्राप्त की गई है।

प्रश्न 10. क्लासियस का कथन स्पष्ट कीजिए।

उत्तर– किसी भी स्वत: क्रिया मशीन के लिए, जिसे कोई भी बाह्य स्रोत की सहायता प्राप्त न हो, ऊष्मा को ठण्डी वस्तु से गर्म वस्तु पर अथवा ऊष्मा का अल्प ताप से उच्च ताप पर पहुंचाना असम्भव है।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (Long Answer Questions)

प्रश्न 1. ऊष्मा व ताप में अन्तर स्पष्ट कीजिये।

उत्तर– ऊष्मा व ताप में अन्तर (Difference between heat and temperature)–

ऊष्मा	ताप
1. ऊष्मा एक प्रकार की ऊर्जा है जो अणुओं की गति से पदार्थ को प्राप्त होती है।	1. ताप किसी वस्तु के गरम होने का स्तर कहलाता है।
2. ऊष्मा का व्यावहारिक मात्रक कैलोरी है।	2. ताप को प्राय: डिग्री सेल्सियस में पाया जाता है।
3. किसी वस्तु की ताप वृद्धि के लिए दी गई ऊष्मा की मात्रा वस्तु के द्रव्यमान, ताप वृद्धि तथा वस्तु के पदार्थ की प्रकृति पर निर्भर करती है।	3. किसी वस्तु की ताप वृद्धि उसको दी गयी उष्मा की मात्रा तथा वस्तु के पदार्थ की प्रकृति पर निर्भर करती है।
4. दो वस्तुओं को दी गई उष्मा समान होने पर उनकी ताप वृद्धि भिन्न हो सकती है।	4. दो वस्तुओं की ताप वृद्धि समान होने पर भी इसके लिए आवश्यक उष्मा की मात्राएं भिन्न हो सकती हैं।
5. उष्मा का मापन कैलोरीमापी द्वारा किया जाता है।	5. ताप का मापन तापमापी द्वारा किया जाता है।

प्रश्न 2. ऊष्मा से आप क्या समझते हैं? ऊष्मा संचरण (Transfer of heat) की विभिन्न विधियों को समझाइये। (2012)

उत्तर– ऊष्मा (Heat)– ऊष्मा एक प्रकार की ऊर्जा है जो पदार्थ के अवस्था परिवर्तन में सहायक होती है।

ऊष्मा का मात्रक जूल होता है तथा इसका विमीय सूत्र $[ML^2 T^{-2}]$ होता है।

ऊष्मा का संचरण अधिक ताप की वस्तु से कम ताप की वस्तु की ओर होता है। ऊष्मा संचरण की तीन विधियां हैं- (*i*) चालन (*ii*) संवहन (*iii*) विकिरण

(*i*) चालन (Conduction)– जब किसी वस्तु के विभिन्न भागों में तापान्तर होता है, तो वस्तु के ऊँचे ताप वाले कण निकटवर्ती नीचे ताप वाले कणों को परस्पर सम्पर्क द्वारा ऊष्मा दे देते हैं। फलत: ऊष्मा ऊँचे ताप वाले स्थान से नीचे ताप वाले स्थान की ओर जाने लगती है। इस क्रिया में माध्यम की आवश्यकता होती है, परन्तु माध्यम के कण अपने स्थान से नहीं हटते। ''ऊष्मा स्थानान्तरण की वह विधि जिसमें ऊष्मा एक स्थान से दूसरे स्थान तक पदार्थ के कणों के अपने स्थान से हटे बिना पहुँच जाती है, चालन कहलाती है।''

उदाहरणार्थ– जब धातु की छड़ के एक सिरे को आग में रखते हैं, तो छड़ के गर्म सिरे से ठण्डे की ओर ऊष्मा 'चालन' द्वारा ही पहुँचती है। फलतः कुछ समय पश्चात् दूसरा सिरा भी गर्म हो जाता है। ठोसों तथा पारे में ऊष्मा का स्थानान्तरण चालन द्वारा ही होता है।

***(ii)* संवहन (Convection)–** जब किसी द्रव (तरल या गैस) के विभिन्न भागों में तापान्तर होता है, तो उच्च ताप के स्थान पर पदार्थ का घनत्व नीचे ताप के स्थान से अपेक्षाकृत कम पाया जाता है। पदार्थ के ऊँचे ताप वाले कण हल्के होने से ऊपर उठने लगते हैं। इन कणों का स्थान लेने के लिए ऊपर के भारी कण (जिनका ताप कम होता है) नीचे आने लगते हैं। यह प्रक्रिया तब तक चलती रहती है जब तक कि सम्पूर्ण पदार्थ का ताप एकसमान नहीं हो जाता। इस प्रकार माध्यम में संवहन धाराएँ (Convection currents) उत्पन्न हो जाती हैं। स्पष्ट है कि इस प्रक्रिया के लिए माध्यम आवश्यक है।

"ऊष्मा के स्थानान्तरण की उस विधि को, जिसमें माध्यम के कण अपना स्थान छोड़कर दूसरे स्थान तक जाते हैं और दूसरे कण उनके स्थान पर आ जाते हैं, 'संवहन' कहते हैं। अतः इस विधि में ऊष्मा संचरण माध्यम के कणों के स्थानान्तरण द्वारा होता है।

उदाहरणार्थ– आग पर रखे बर्तन का जल संवहन द्वारा ही गर्म होता है। संवहन केवल तरल पदार्थों (द्रवों अथवा गैसों) में ही होता है (ठोसों में नहीं)। इसका कारण यह है कि द्रव तथा गैसों के कण एक स्थान से दूसरे स्थान तक सरलता से जा सकते हैं। द्रवों तथा गैसों में ऊष्मा का संरचण चालन द्वारा भी सम्भव है, परन्तु इसका अनुपात बहुत कम होता है।

***(iii)* विकिरण (Radiation)–** किसी गर्म वस्तु से ऊष्मा विद्युत चुम्बकीय तरंगों (electromagnetic waves) के रूप में निकलती है। इसे ऊष्मीय विकिरण (radiation) कहते हैं।

गर्म वस्तु से उत्सर्जित विकिरण अपेक्षाकृत ठण्डे तल पर जब पड़ता है तो उसे गर्म कर देता है। इसके संचरण के लिए माध्यम की आवश्यकता नहीं होती। ऊष्मा के संचरण की इस विधि को जिसमें माध्यम की आवश्यकता नहीं होती 'विकिरण' कहते हैं। उदाहरणार्थ, सूर्य से पृथ्वी पर ऊष्मा विकिरण द्वारा ही पहुँचती है।

यदि एक स्थान से दूसरे स्थान को विकीर्णित होने वाली ऊष्मा के बीच कोई माध्यम भी होता है तो विकिरण विधि में माध्यम को बिना गर्म किये ऊष्मा संचरित हो जाती है।

उदाहरणार्थ- जब हम जलती हुई अंगीठी के समीप खड़े होते हैं, तो हमें गर्मी का अनुभव होता है परन्तु हमारे व अंगीठी के बीच की वायु गर्म नहीं होती। विकिरण के मार्ग में पर्दा लगा देने पर विकिरण को रोका जा सकता है यही कारण है कि धूप में छाता लगाकर सूर्य के ऊष्मीय विकिरण से बचा जा सकता है।

प्रश्न 3. ताप मापने का सिद्धान्त क्या है? ताप मापने के विभिन्न पैमाने कौन-कौन से हैं?

उत्तर– ताप मापने का सिद्धान्त– ताप का मापक्रम बनाने के लिए पदार्थ की ऐसी दो अवस्थाओं को चुनते हैं जिन्हें किसी भी समय सरलता से प्राप्त किया जा सकता है और ये हैं-हिमांक, गलती बर्फ का ताप, भाप बिन्दु, उबलते जल की भाप का ताप। इन तापों को स्वैच्छिक आंकिक मान दे देते हैं और इन मानों के अन्तर को बराबर-बराबर भागों में बांट देते हैं। प्रत्येक भाग को डिग्री कहते हैं। डिग्री की माप के लिए पदार्थ का वह गुण उपयोग करते हैं जो ताप के साथ परिवर्तित होता है। इसे तापमापक गुण कहते हैं। माना तापमापक गुण का मान ताप के समानुपाती है और 0°C (हिमांक), 100°C (भाप बिन्दु), t°C (अज्ञात) पर क्रमशः x_0, x_{100} व x_6 है।

$$x_0 = a(0) \qquad ...(i)$$
$$x_{100} = a(100) \qquad ...(ii)$$
$$x_t = a(t) \qquad ...(iii)$$

जहाँ a समानुपाती नियतांक

समी. (*i*) व (*ii*) से

$$x_{100} - x_0 = 100\,a \qquad ...(iv)$$

समी. (*i*) व (*iii*) से

$$x_{10} - x_0 = t.\,a \qquad ...(v)$$

समी. (*v*) को समी. (*iv*) से भाग देने पर

$$\frac{x_t - x_0}{x_{100} - x_0} = \frac{t}{100}$$

$$\boxed{t = 100\left(\frac{x_t - x_0}{x_{100} - x_0}\right)°C}$$

इस सूत्र से अज्ञात ताप का मान ज्ञात कर सकते हैं।

ताप मापने के विभिन्न पैमाने–

1. सेल्सियस पैमाना (Celsius Scale)– इसका आविष्कार एन्डर्स सेल्सियस ने किया था (°C) निम्नतम तथा उच्चतम (100 °C) स्थाई बिन्दु के मध्य 100 बराबर भागों में बंटा रहता है। प्रत्येक भाग को 1°C कहते हैं।

2. फारेनहाइट पैमाना– इसका आविष्कार गब्रेरियल एफ. ने किया था। इसमें निम्नतम बिन्दु (32°F) तथा अधिकतम बिन्दु (212°F) होता है। यह पैमाना 180 समान भागों में बंटा रहता है।

3. केल्विन पैमाना (Kelvin or Absolute Scale)– इसका आविष्कार वार्ड केल्विन ने किया था। निम्नतम बिन्दु (273°K) व उच्चतम (373°K) के बीच का अन्तराल 100 समान भागों में बंटा रहता है। प्रत्येक भाग का मान 1 K होता है।

4. रयूमर पैमाना (Reaumar Scale)– इसका आविष्कार R.A. Reaumer ने किया था। इसका निम्नतम बिन्दु (0°R) तथा उच्चतम बिन्दु 80° R) के बीच 80 समान अन्तराल होते हैं।

इन पैमानों में निम्न सम्बन्ध हैं।

$$\boxed{\frac{F-32}{180}=\frac{R}{80}=\frac{C}{100}=\frac{K-273}{100}}$$

प्रश्न 4. ठोस में ऊष्मीय प्रसार से आप क्या समझते हैं?

उत्तर– जब किसी ठोस को गर्म किया जाता है तो वह गर्मी (ऊष्मा) पाकर फैलने लगता है। इस घटना को ठोसों का ऊष्मीय प्रसार कहते हैं।

ठोसों में ऊष्मीय प्रसार निम्नलिखित तीन प्रकार से होता है–

1. ठोस का दैर्ध्य अथवा रेखीय प्रसार (Linear Expansion)– छड़ को गर्म करने पर यदि केवल छड़ की लम्बाई में वृद्धि हो तो इस प्रकार के ऊष्मीय प्रसार को दैर्ध्य प्रसार या रेखीय प्रसार कहते हैं।

2. ठोस का क्षेत्रीय प्रसार (Superficial Expansion)– जब किसी ठोस को गर्म किया जाता है तो उसकी लम्बाई व चौड़ाई दोनों में वृद्धि हो जाती है अर्थात् उसके क्षेत्रफल में वृद्धि हो जाती है। ताप-वृद्धि के कारण ठोस के क्षेत्रफल में हुई वृद्धि को ठोस का क्षेत्रीय प्रसार कहते हैं।

3. ठोस का आयतन प्रसार (Volume expansion)– ठोसों को गर्म करने पर उनके आयतन में होने वाली वृद्धि को ठोस का आयतन प्रसार कहते हैं। जैसे- लोहे की ठोस गेंद का प्रसार।

प्रश्न 5. रेखीय प्रसार गुणांक, क्षेत्रीय प्रसार गुणांक एवं आयतन प्रसार गुणांक से आप क्या समझते हैं?

उत्तर– रेखीय प्रसार गुणांक (Coefficient of Linear Expansion)– माना किसी छड़ की किसी ताप पर लम्बाई L है तथा उसके ताप में Δt की वृद्धि करने पर इसकी लम्बाई $(L+\Delta L)$ हो जाती है, तब छड़ की लम्बाई में वृद्धि

$$\Delta L \propto L \times \Delta t$$

अथवा $\quad \Delta L = \alpha \times L \times \Delta t \quad$ ...(*i*)

जहाँ α एक नियतांक है, जो छड़ के पदार्थ पर निर्भर करता है। इसे छड़ के पदार्थ का रेखीय प्रसार गुणांक अथवा दैर्ध्य प्रसार गुणांक कहते हैं।

समी. (*i*) से,

$$\alpha = \frac{\Delta L}{L \times \Delta L}$$

$$= \frac{\text{लम्बाई में वृद्धि}}{\text{प्रारम्भिक लम्बाई} \times \text{ताप वृद्धि}}$$

यदि $\quad \Delta t = 1°C$ है तो

$$\alpha = \frac{\Delta L}{L}$$

अत: किसी पदार्थ की छड़ का ताप 1°C बढ़ाने पर छड़ की लम्बाई में होने वाली वृद्धि तथा छड़ की प्रारम्भिक लम्बाई के अनुपात को उस पदार्थ का रेखीय प्रसार गुणांक अथवा दैर्ध्य प्रसार गुणांक कहते हैं। इसका मात्रक प्रति °C है।

क्षेत्रीय प्रसार गुणांक (Coefficient of Superficial Expansion)– माना किसी पटल का प्रारम्भिक क्षेत्रफल A तथा इसके ताप में Δt की वृद्धि करने पर इसका क्षेत्रफल $(A+\Delta A)$ हो जाता है, तब पटल के क्षेत्रफल की वृद्धि

अथवा $\quad \Delta A \propto A \times \Delta t$

$$\Delta A = \beta \times A \times \Delta t \quad ...(i)$$

जहाँ β एक नियतांक है जो ठोस के पदार्थ पर निर्भर करता है। इसे पटल के पदार्थ का क्षेत्रीय प्रसार गुणांक कहते हैं।

समी. (*i*) से,

$$\beta = \frac{\Delta A}{A \times \Delta t}$$

$$= \frac{\text{क्षेत्र में वृद्धि}}{\text{प्रारम्भिक लम्बाई} \times \text{ताप वृद्धि}}$$

यदि $\Delta t = 1°C$ है तो $\beta = \dfrac{\Delta A}{A}$

अत: "किसी पदार्थ के पटल का ताप 1°C बढ़ने पर, पटल के क्षेत्रफल में होने वाली तथा पटल के प्रारम्भिक

क्षेत्रफल के अनुपात को उस पदार्थ का क्षेत्रीय प्रसार गुणांक कहते हैं।"

इसका मात्रक प्रति °C है।

आयतन प्रसार गुणांक (Coefficient of Volume Expansion)– माना किसी पदार्थ के पिण्ड का प्रारम्भिक आयतन V है तथा ताप में Δt वृद्धि करने पर इसका आयतन $(V + \Delta V)$ हो जाता है, तब पिण्ड के आयतन में वृद्धि

$$\Delta V \propto V \times \Delta t$$

अथवा $\Delta V = \gamma \times V \times \Delta t$ ...(i)

जहाँ γ (गामा) एक नियतांक है जो पिण्ड के पदार्थ पर निर्भर करता है। इसे पिण्ड के पदार्थ का आयतन प्रसार गुणांक कहते हैं।

समी. (i) से.

$$\gamma = \frac{\Delta V}{V \times \Delta t}$$

$$= \frac{\text{आयतन में वृद्धि}}{\text{प्रारम्भिक आयतन} \times \text{ताप वृद्धि}}$$

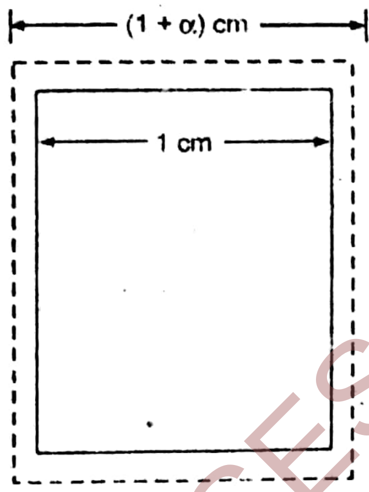
यदि $\Delta t = 1°C$ है तो

$$\Delta = \frac{\Delta V}{V}$$

अत: "किसी पदार्थ के एक पिण्ड का ताप 1°C बढ़ाने पर उसके आयतन में होने वाली वृद्धि तथा पिण्ड के प्रारम्भिक आयतन के अनुपात को उस पदार्थ का आयतन प्रसार गुणांक कहते हैं। इसका मात्रक प्रति °C है।

प्रश्न 6. सिद्ध कीजिये $\beta = 2\alpha, \gamma = 3\alpha$ और $\alpha : \beta : \gamma = 1:2:3$ जहाँ α, β, γ क्रमशः रेखीय, क्षेत्रीय, आयतन प्रसार गुणांक हैं।

उत्तर– रेखीय प्रसार गुणांक (α) तथा क्षेत्रीय प्रसार गुणांक (β) में सम्बन्ध– माना किसी ताप पर किसी पदार्थ के एक वर्गाकार पटल की प्रत्येक भुजा की लम्बाई 1 cm है तथा उसका रेखीय प्रसार गुणांक α है, अत: इसका क्षेत्रफल 1 cm^2 होगा। इस पटल का ताप 1°C बढ़ा देने पर पटल की प्रत्येक भुजा की लम्बाई $(1 + \alpha)$ सेमी. तथा पटल का क्षेत्रफल $= (1 + \beta)^2$ cm^2 हो जायेगा।



चित्र-1.

अत: क्षेत्रफल में वृद्धि

$$= (1 + \alpha)^2 - 1$$
$$= 1 + 2\alpha + \alpha^2 - 1$$
$$= 2\alpha + \alpha^2$$

चूँकि α बहुत छोटी राशि है; अत: α^2 और भी छोटी राशि होगी–

इसलिए α^2 को छोड़ देते हैं।

अत: क्षेत्रफल में वृद्धि $= 2\alpha$

क्षेत्रीय प्रसार गुणांक

$$(\beta) = \frac{\text{क्षेत्रफल में वृद्धि}}{\text{प्रारम्भिक क्षेत्रफल} \times \text{ताप वृद्धि}}$$

$$= \frac{2\alpha}{1 \times 1} = 2\alpha$$

अत: $\beta = 2\alpha$ ...(i)

अथवा $\alpha = \dfrac{\beta}{2}$

अत: किसी पदार्थ में क्षेत्रीय प्रसार गुणांक उसके रेखीय प्रसार गुणांक का दो गुना होता है।

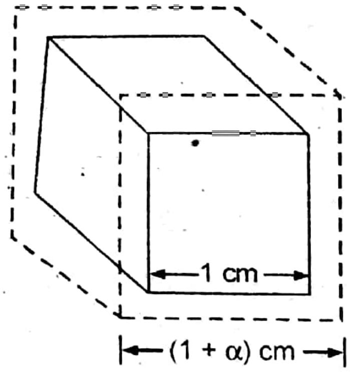
रेखीय प्रसार गुणांक (α) तथा आयतन प्रसार गुणांक (γ) में सम्बन्ध

माना किसी ताप पर किसी पदार्थ के घन की प्रत्येक भुजा 1 cm है तथा उसका रेखीय प्रसार का गुणांक α है, अत: घन का आयतन 1 cm^3 होगा। इस घन का ताप 1°C बढ़ा देने पर घन की प्रत्येक भुजा $= (1 + \alpha)$ cm या घन का आयतन $= (1 + \alpha)^3$ हो जाएगा।

अत: घन के आयतन में वृद्धि $= (1+\alpha)^3 - 1$

$$= 1 + 3\alpha + 3\alpha^2 + \alpha^3 - 1$$
$$= 3\alpha + 3\alpha^2 + \alpha^3$$

चूंकि α का मान बहुत कम है: अत: α^2 तथा α^3 के मान और भी कम होंगे, इसलिए α^2 तथा α^3 को छोड़ देते हैं।



चित्र-2.

अत: आयतन में वृद्धि $= 3\alpha$

आयतन प्रसार गुणांक (γ)

$$= \frac{\text{आयतन में वृद्धि}}{\text{प्रारम्भिक आयतन} \times \text{ताप वृद्धि}}$$

$$= \frac{3\alpha}{1\times 1} = 3\alpha$$

अत: $\gamma = 3\alpha$ ...(2)

रेखीय, क्षेत्रीय तथा आयतन प्रसार गुणांकों में सम्बन्ध:

समी. (1) व समी. (2) से, $\beta = 2\alpha$ तथा $\gamma = 3\alpha$

अत: $\alpha : \beta : \gamma = \alpha : 2\alpha : 3\alpha$

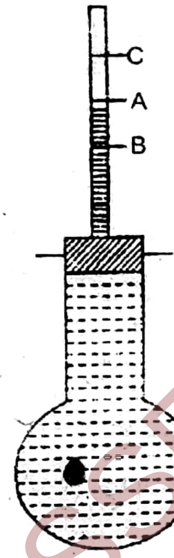
अथवा $\alpha : \beta : \gamma = 1 : 2 : 3$

यह रेखीय, क्षेत्रीय तथा आयतन प्रसार गुणांकों में सम्बन्ध है।

प्रश्न 7. द्रवों में ऊष्मीय प्रसार ज्ञात कीजिये।

उत्तर– द्रवों का अपना कोई निश्चित रूप नहीं होता। वे उस बर्तन जिनमें ये रखे जाते हैं उसी का रूप धारण कर लेते हैं। अत: उनमें केवल आयतन प्रसार ही होता है। अत: गर्म करने पर पहले बर्तन का प्रसार होता है फिर बाद में द्रव का। इसे हम एक साधारण प्रयोग द्वारा देख सकते हैं।

चित्र में काँच के एक फ्लास्क के मुँह पर लम्बी व पतली नली लगी है। पूरे फ्लास्क में कोई द्रव भरा है जो नली में चिह्न A तक चढ़ा हुआ है। जब फ्लास्क को गर्म करते हैं तो नली में द्रव का तल पहले A से B तक गिरता है तथा फिर A से ऊपर C तक चढ़ जाता है।



चित्र-3.

द्रव का तल प्रारम्भ में चित्र A तक था। द्रव को एक निश्चित ताप तक गर्म करने पर तल चिह्न C तक चढ़ जाता है। अत: हमें द्रव का आयतन प्रसार AC के बराबर आभासित होता है। यह द्रव का आभासी आयतन प्रसार है। द्रव का वास्तविक आयतन प्रसार BC है जो आभासी प्रसार AC से अधिक है। इसका कारण यह है कि गर्म होने से फ्लास्क का भी आयतन बढ़ा है तथा इस बढ़े हुए आयतन में भी द्रव भरा है। अत: द्रव का वास्तविक आयतन प्रसार उसके आभासी आयतन प्रसार तथा बर्तन के आयतन प्रसार के योग के बराबर है।

$$\boxed{BC = AC + AB}$$

इस प्रकार द्रव का आयतन प्रसार दो प्रकार का होता है।

1. आभासी प्रसार (Apparent Expansion)– यदि बर्तन के प्रसार का ध्यान न रखते हुये द्रव का प्रसार मापा जाये तो उसे 'आभासी-प्रसार' कहते हैं। चित्र में AC द्रव का आभासी प्रसार है।

2. वास्तविक प्रसार (Real Expansion)– बर्तन के प्रसार को ध्यान में रखते हुए द्रव में जो प्रसार होता है, उसे 'वास्तविक प्रसार' कहते हैं। चित्र में BC द्रव का वास्तविक प्रसार है।

द्रव के दोनों प्रसारों में निम्न सम्बन्ध है।

$$\boxed{\text{वास्तविक प्रसार} = \text{आभासी प्रसार} + \text{बर्तन का प्रसार}}$$

1. द्रव का आभासी प्रसार गुणांक– किसी द्रव का ताप 1°C बढ़ाने पर द्रव के आयतन में होने वाली आभासी वृद्धि तथा द्रव के आयतन में होने वाली आभासी वृद्धि तथा

द्रव के प्रारम्भिक आयतन के अनुपात को उस द्रव का आभासी प्रसार-गुणांक कहते हैं।

$$\boxed{\gamma_a = \frac{\text{द्रव के आयतन में आभासी वृद्धि}}{\text{प्रारम्भिक आयतन} \times \text{ताप वृद्धि}} = \frac{(\Delta V)_a}{V \times \Delta t}}$$

2. द्रव का वास्तविक प्रसार गुणांक– किसी द्रव का PC बढ़ाने पर द्रव के आयतन में होने वाली वास्तविक वृद्धि तथा द्रव के प्रारम्भिक आयतन के अनुपात को उस द्रव का वास्तविक प्रसार गुणांक कहते हैं। इसे γ_r से प्रदर्शित करते हैं। सूत्र द्वारा

$$\boxed{\gamma_{ri} = \frac{\text{द्रव के आयतन में वास्तविक वृद्धि}}{\text{प्रारम्भिक आयतन} \times \text{ताप वृद्धि}} = \frac{(\Delta V)_a}{V \times \Delta t}}$$

प्रश्न 8. गैसों में ऊष्मीय प्रसार को समझाइये। एक आदर्श गैस का प्रसार कैसे होता है? समझाइये।

उत्तर– ताप बढ़ने पर गैस के आयतन का प्रसार होता है। ताप के साथ गैस के आयतन में वृद्धि की दर नियत ताप पर उसकी प्रसारता द्वारा परिभाषित की जाती है। इसे α_p द्वारा प्रदर्शित करते हैं। यदि

0°C पर गैस का आयतन $= V_0$

सामान्य ताप पर गैस, गैस का आयतन $= V_V$

तब गैस का विस्तार

$$\alpha_p = \frac{V - V_0}{V_0} \times \frac{1}{\theta}$$

अथवा $$\alpha_p = \frac{V - V_0}{V_0 \theta}$$

$$V = V_0 (1 + \alpha_p \theta)$$

चार्ल्स ने ज्ञात किया कि α_p का मान सभी गैसों के लिए $\frac{1}{273}$ होता है। इस प्रकार "प्रत्येक गैस के एक दिये गये आयतन में नियत दाब पर प्रत्येक 1°C ताप की वृद्धि होने पर गैस के 8°C पर आयतन के $\frac{1}{273}$ भाग के बराबर वृद्धि होती है।"

आदर्श गैस का प्रसार– आदर्श गैस समीकरण

$$PV = \mu RT \qquad ...(1)$$

नियत दाब पर

$$P\Delta V = \mu R \Delta T \qquad ...(2)$$

समी (2) व (1) से भाग करने पर

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta T}{T}$$

गैस का आयतन प्रसार गुणांक

$$\gamma_p = \frac{\Delta V}{V \Delta T} = \frac{1}{T} \qquad ...(3)$$

नियत आयतन पर

$$\Delta P V = \mu R \Delta T$$

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta T}{T}$$

∴ गैस का दाब प्रसार गुणांक

$$\gamma_v = \frac{\Delta P}{P \Delta T} = \frac{1}{T} \qquad ...(4)$$

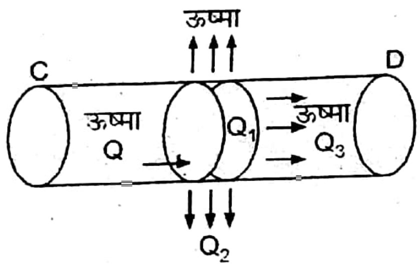
स्पष्ट है आदर्श गैस के लिए

$$\gamma_p = \gamma_v = \frac{1}{T}$$

आदर्श गैस के लिए 0°C पर $\gamma_v = 3.7 \times 10^{-3}\ k^{-1}$ जो ठोसों तथा द्रवों की अपेक्षा अत्यधिक बड़ा है। समीकरण (3) व (4) यह दर्शाती है कि γ_v तथा γ_p ताप पर निर्भर हैं तथा ताप के बढ़ने पर कम हो जाती है। कक्ष ताप पर $\gamma_v = 33 \times 10^{-3}\ k^{-1}$

प्रश्न 9. धातु की छड़ में ऊष्मा चालन की सचित्र व्याख्या कीजिये।

उत्तर– जब किसी सुचालक (धातु की) छड़ के किसी एक सिरे को गर्म किया जाता है, तो चालन द्वारा ऊष्मा गर्म सिरे से ठण्डे सिरे की ओर संचरित होने लगती है। चित्र में एक छड़ CD दिखायी गयी है जिसका सिरा C गर्म किया जा रहा है तथा D ठण्डा सिरा है। अत: छड़ में ऊष्मा चालन द्वारा C सिरे से D सिरे की ओर संचरित हो रही है। छड़ को अनेक परिच्छेदों (sectons) में बंटा हुआ माना जा सकता है। चालन की प्रक्रिया में छड़ का प्रत्येक परिच्छेद अपने पीछे वाले परिच्छेद से ऊष्मा लेता है।



चित्र 4.

माना यह Q है। इस ऊष्मा का कुछ भाग (माना Q_1) परिच्छेद स्वयं अवशोषित करके अपना ताप बढ़ाता है। कुछ भाग (माना Q_2) परिच्छेद के पार्श्वों से संवहन व विकिरण द्वारा वातावरण में चला जाता है। केवल ऊष्मा के शेष भाग (माना Q_3) को वह अपने से अगले परिच्छेद को संचरित करता है।

अत: स्पष्ट है कि $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$

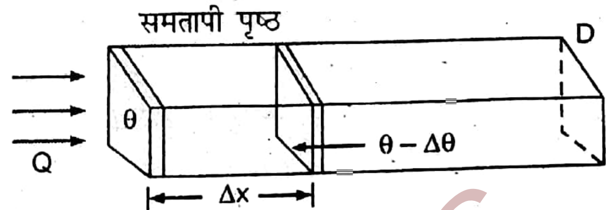
"छड़ की यह अवस्था परिवर्ती अवस्था (variable state) कहलाती है, चूँकि इस अवस्था में प्रत्येक परिच्छेद का ताप समय के साथ बढ़ता रहता है।"

छड़ के तप्त सिरे C को लगातार गर्म करते रहने पर कुछ समय बाद छड़ के प्रत्येक परिच्छेद की ताप वृद्धि रुक जाती है अर्थात् उसका नाम स्थिर हो जाता है। इस दशा में छड़ का प्रत्येक परिच्छेद अपने पीछे वाले परिच्छेद से जो ऊष्मा लेता है, उसका कुछ भाग परिच्छेद के पृष्ठ से संवहन तथा विकिरण द्वारा वातावरण में चला जाता है तथा शेष को वह अपने से अगले परिच्छेद को संचरित कर देता है। तात्पर्य यह है कि इस अवस्था में छड़ का प्रत्येक परिच्छेद अपना ताप बढ़ाने के लिए ऊष्मा का अवशोषण नहीं करता अर्थात् $Q_1 = 0$

"छड़ की इस अवस्था को जिसमें छड़ का कोई भी भाग ऊष्मा का अवशोषण नहीं करता, स्थायी अवस्था (steady state) कहते हैं।" स्थायी अवस्था में छड़ के प्रत्येक भाग का ताप अलग-अलग परन्तु स्थिर होता है। जैसे-जैसे छड़ के गर्म सिरे से दूर जाते हैं, ताप घटता जाता है। यदि छड़ को ऊष्मारोधी पदार्थ (जैसे—रुई, ऊन इत्यादि) से ढक दिया जाये जिससे कि संवहन तथा विकिरण द्वारा ऊष्मा का क्षय न हो (अर्थात् $Q_2 = 0$) तो छड़ के प्रत्येक परिच्छेद को जितनी ऊष्मा पिछले परिच्छेद से मिलती है, स्थायी अवस्था में उतनी ही ऊष्मा अगले परिच्छेद को संचरित कर दी जाती है। अत: "इस अवस्था में छड़ में ऊष्मा संचरण की दर केवल छड़ के पदार्थ के एक विशिष्ट गुण पर निर्भर करती है, जिसे छड़ के पदार्थ की ऊष्मा चालकता कहते हैं।

प्रश्न 10. ताप प्रवणता को चित्र की सहायता से स्पष्ट कीजिये।

उत्तर– ताप प्रवणता (Temperature gradient)–



चित्र-5.

किसी माध्यम में दो समतापी पृष्ठों के बीच की दूरी के साथ ताप परिवर्तन की दर को ताप-प्रवणता कहते हैं।

चित्र में दो समातापी पृष्ठ दिखाये गये हैं जो परस्पर Δx लम्बवत् दूरी पर स्थित हैं तथा इनके ताप क्रमश: θ तथा $\theta - \Delta\theta$ हैं। अत: इन पृष्ठों के बीच–

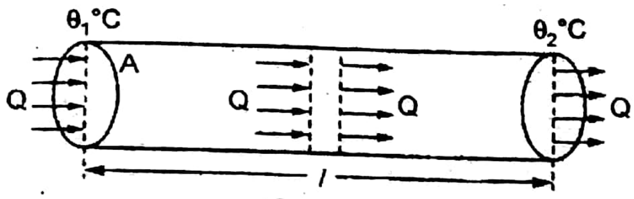
$$\text{ताप-प्रवणता} = \frac{\text{ताप-परितर्वन}}{\text{लम्बवत् दूरी}} = \frac{(\theta - \Delta\theta) - \theta}{\Delta x}$$

$$= -\left(\frac{\Delta\theta}{\Delta x}\right)$$

ताप-प्रवणता का ऋणात्मक होना यह प्रदर्शित करता है कि छड़ में ऊष्मा संचरण की दिशा में दूरी के बढ़ने के साथ-साथ छड़ का ताप θ घटता जाता है। ताप-प्रवणता का मात्रक °C प्रति मीटर है। यह एक वेक्टर राशि है, जिसकी दिशा कम ताप से उच्च ताप की ओर होती है। इसलिए ऊष्मा चालन की दिशा, ताप-प्रवणता की दिशा के विपरीत होती है। यदि किसी माध्यम के ऊष्मीय गुण विभिन्न दिशाओं में भिन्न-भिन्न हों, तो उस माध्यम में समतापी पृष्ठ समान्तर नहीं होंगे। फलत: किन्हीं दो समतापी पृष्ठों के बीच ताप-प्रवणता अलग-अलग स्थानों पर अलग-अलग होगी।

प्रश्न 11. ऊष्मा चालकता गुणांक को विस्तार पूर्वक समझाइये। **2016(s)**

उत्तर– ऊष्मा चालकता गुणांक (Coefficient of thermal Conductivity)– यदि लम्बी तथा एकसमान अनुप्रस्थ परिच्छेद A की एक सुचालक छड़ स्थायी अवस्था में है तथा इसके एक-दूसरे से Δx दूरी पर स्थित दो समतापी पृष्ठों के ताप क्रमश: θ तथा $\theta - \Delta\theta$ हैं, तो प्रयोग द्वारा देखा गया है कि इन पृष्ठों के लम्बवत् इनसे t समय में संचरित होने वाली ऊष्मा की मात्रा Q



चित्र-6.

(*i*) प्रत्येक पृष्ठ के क्षेत्रफल A के अनुक्रमानुपाती होती है।

(*ii*) पृष्ठों के बीच ताप-प्रवणता $(-\Delta\theta/\Delta x)$ के अनुक्रमानुपाती होती है।

(*iii*) समय (t) के अनुक्रमानुपाती होती है।

$$\therefore \qquad Q \propto A\left(\frac{-\Delta\theta}{\Delta x}\right)t$$

या $$Q = -KA\left(\frac{\Delta\theta}{\Delta x}\right)t \qquad ...(1)$$

जहाँ K एक नियतांक है जिसका मान छड़ के पदार्थ पर निर्भर करता है। इसे छड़ के पदार्थ का ऊष्मा चालकता गुणांक (coefficient of thermal conductivity) कहते हैं। छड़ की स्थायी अवस्था में छड़ के प्रत्येक परिच्छेद को जितनी ऊष्मा इससे पहले परिच्छेद से मिलती है, वह पूरी की पूरी अगले परिच्छेद को दे दी जाती है, बशर्ते छड़ के पार्श्वों से विकिरण द्वारा ऊष्मा का ह्रास नगण्य हो। इस प्रकार Q का मान छड़ के प्रत्येक स्थान पर समान होगा। अतः समीकरण (1) के अनुसार छड़ के सभी परिच्छेदों के लिए ताप-प्रवणता $(-\Delta\theta/\Delta x)$ का मान समान होगा।

अतः यदि A अनुप्रस्थ काट की छड़ की लम्बाई l तथा स्थायी अवस्था में इसके तप्त एवं ठण्डे सिरों के ताप क्रमशः θ_1 व θ_2 हों (चित्र)

तो $$\frac{\Delta\theta}{\Delta x} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{l} \text{ या } -\left(\frac{\Delta\theta}{\Delta x}\right) = \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{l}\right)$$

ताप-प्रवणता $(-\Delta\theta/\Delta x)$ का मान समीकरण (1) में रखने पर-

$$Q = KA\frac{(\theta_1 - \theta_2)t}{l} \qquad ...(2)$$

समीकरण (2) में यदि छड़ की लम्बाई $l = 1$ मीटर, छड़ का अनुप्रस्थ क्षेत्रफल $A = 1$ मीटर^2, तापान्तर $(\theta_1 - \theta_2) = 1°C$ तथा समय $t = 1$ सेकण्ड हो, तब

$$Q = \frac{K \times 1 \times 1 \times 1}{1} = K$$

अतः किसी पदार्थ का ऊष्मा चालकता गुणांक ऊष्मा की वह मात्रा है जो स्थायी अवस्था में उस पदार्थ की 1 मीटर लम्बी तथा 1 मीटर^2 अनुप्रस्थ क्षेत्रफल की छड़ में 1 सेकण्ड में संचरित होती है जबकि छड़ के दोनों सिरों का तापान्तर 1°C हो तथा ऊष्मा का प्रवाह छड़ की अनुप्रस्थ पृष्ठों के लम्बरूप हो।

K का मान जितना अधिक होता है, पदार्थ उतना ही अच्छा चालक कहलाता है। एक आदर्श सुचालक (perfect heat conductor) के लिए K का मान अनन्त तथा एक पूर्ण कुचालक या ऊष्मारोधी (perfect heat insulator) के लिए K का मान शून्य होता है। अतः विभिन्न पदार्थों की ऊष्मा चालकता भिन्न-भिन्न होती है।

प्रश्न 12. दैनिक जीवन में चालकता के उपयोगों का वर्णन कीजिये।

उत्तर- दैनिक जीवन में चालकता के अनुप्रयोग निम्नलिखित हैं-

(1) धातु के प्याले में चाय पीना कठिन है, जबकि चीनी-मिट्टी के प्याले में सरल- धातु के प्याले में गर्म चाय पीने पर हमारे होंठ जल जाते हैं। इसका कारण यह है कि हमारे होंठ जिह्वा की अपेक्षा गर्मी के लिए अधिक संवेदनशील हैं। चाय का प्याला धातु का बना होने पर होंठ तक ऊष्मा शीघ्र पहुँचती है। क्योंकि चीनी-मिट्टी ऊष्मा की कुचालक है, चाय पीने पर होंठ कम ताप के सम्पर्क में आते हैं, जिससे कि गर्म चाय हम पी लेते हैं।

(2) बर्फ को पिघलने से बचाने के लिए उसे लकड़ी के बुरादे, टाट या नमदे में लपेट कर रखते हैं- इसका कारण यह है कि इन वस्तुओं में छिद्र अधिक होते हैं। इन छिद्रों में वायु भरी होती है। वायु ऊष्मा की कुचालक है जिससे बाहर की ऊष्मा बर्फ तक नहीं पहुँच पाती और बर्फ पिघलती नहीं है।

(3) पुरानी रजाइयाँ नयी रजाइयों की अपेक्षा शरीर को कम गर्म रखती हैं- प्रयोग करते-करते रुई दब जाती है जिससे रुई में फँसी हुई वायु की मात्रा कम रह जाती है। वायु ऊष्मा की कुचालक होती है। अतः वायु की मात्रा कम रहने के कारण शरीर की ऊष्मा बाहर आ जाती है। नयी रजाइयों में वायु की मात्रा अधिक होने से ऊष्मा के बाहर आने की क्रिया नहीं हो पाती है। इस कारण पुरानी रजाइयाँ शरीर को कम गर्म रखती है।

(4) मोटे काँच के गिलास में चाय डालने पर गिलास चटक जाता है– काँच ऊष्मा का कुचालक है। जब काँच के गिलास में गरम चाय या दूध डाला जाता है तो गिलास की भीतरी सतह गरम होकर प्रसारित होने लगती है लेकिन काँच के कुचालक होने के कारण भीतर की सतह की ऊष्मा बाहर की सतह तक नहीं पहुँच पाती। फलस्वरूप अन्दर की सतह के प्रसारित होने और बाहर की सतह के अपने स्थान पर पहले की तरह ही अप्रभावित बने रहने के कारण गिलास चटक जाता है।

(5) सर्दी में लोहा, लकड़ी की अपेक्षा अधिक ठण्डा लगता है यद्यपि दोनों का ताप समान होता है– इसका कारण यह है कि लोहा ऊष्मा का सुचालक है। सर्दी में हमारे शरीर का ताप कमरे के ताप से अधिक होता है। अत: जब लोहे को छूते हैं, तो वह हमारे हाथ से जल्दी-जल्दी ऊष्मा लेकर अपने अन्दर फैला देता है और हमें ठण्डा लगता है। परन्तु लकड़ी, ऊष्मा की कुचालक है। अत: वह हमारे हाथ में बहुत धीरे-धीरे ऊष्मा लेती है, अत: कम ठंडी लगती है। गर्मियों में हमारे शरीर का ताप कमरे के ताप से कम रहता है। अत: हम लोहे को छूते हैं तो वह हमारे हाथ को तेजी से जल्दी-जल्दी ऊष्मा लेकर अपने अन्दर फैला देता है और हमें ठण्डा लगता है। परन्तु लकड़ी, ऊष्मा की कुचालक है। अत: कम गर्म छूते हैं तो वह हमारे हाथ को तेजी से ऊष्मा देता है और गर्म लगता है परन्तु लकड़ी हाथ को बहुत धीरे-धीरे ऊष्मा देती है, अत: कम गर्म लगती है। यही कारण है कि अंगीठी के दस्ते, इन्जन में कोयला झोंकने के करछुले का दस्ता तथा कपड़ों पर प्रेस करने की इस्तरी (iron) के दस्ते लकड़ी के बने होते हैं। और इसी कारण हम जलती हुई दियासलाई को हाथ में पकड़े रह सकते हैं। जलती हुई मोमबत्ती का कुचालक धागा ज्वाला की ऊष्मा को मोम तक नहीं पहुँचने देता। खाने की मेज पर गर्म प्लेटों के नीचे कॉर्क के टुकड़े बिछा देते हैं ताकि प्लेटों की ऊष्मा से मेज की पॉलिश खराब न हो।

इनके विपरीत, भोजन पकाने के बर्तन एल्यूमीनियम, पीतल अथवा लोहे के बनाये जाते हैं क्योंकि ये ऊष्मा के कुचालक होने के कारण, आगे की ऊष्मा शीघ्रता से भोजन को दे देते हैं।

(6) वायु ऊष्मा की कुचालक– यदि व्यक्ति अपने रहने के मकान ठोस ईंटों के स्थान पर वायु भरी ईंटों से बनाये तो वायु के ऊष्मा की कुचालक होने के कारण गर्मियों में बाहर की ऊष्मा अन्दर नहीं पहुँच सकती। अतएव ठोस ईंटों से बने मकान की अपेक्षा वायु भरी ईंटों से निर्मित मकान कम गरम होंगे।

ऐस्कीमो लोग बर्फ की दोहरी दीवार के मकान बनाते हैं। दीवारों के बीच हवा भरी रहती है। हवा ऊष्मा की कुचालक है। अत: वह दीवार के अन्दर और बाहर ऊष्मा का आदान-प्रदान नहीं होने देती है। इस प्रकार मकान के अन्दर का ताप (मनुष्य शरीर की गर्मी और आग आदि जलाने से) बाहर की तुलना में अधिक बना रहता है तथा ऐस्कीमो लोगों की शीत से रक्षा हो जाती है।

प्रश्न 13. समतापी प्रक्रम एवं रुद्धोष्म प्रक्रम को समझाइये। (2010)

उत्तर– समतापी प्रक्रम (Isothermal process)– जब ऊष्मागतिक निकाय में होने वाले किसी प्रक्रम के अन्तर्गत निकाय का ताप स्थिर रहता है, तो उस प्रक्रम को समतापी प्रक्रम कहते हैं। ऐसे प्रक्रम में Q, W तथा ΔU में से कोई भी शून्य नहीं होता है। परन्तु चूँकि एक आदर्श गैस की आन्तरिक ऊर्जा केवल इसके ताप पर निर्भर करती है, इसलिए समतापी प्रक्रम में ताप नियत होने के कारण आदर्श गैस की आन्तरिक ऊर्जा में कोई परिवर्तन नहीं होगा अर्थात् $\Delta U = 0$

अत: ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम $\Delta U = Q - W$ के अनुसार

$$0 = Q - W \text{ या } Q = W$$

अत: एक आदर्श गैस के समतापी प्रक्रम में गैस को दी गयी समस्त ऊष्मा, उसके द्वारा बाह्य दाब के विरुद्ध कार्य करने में व्यय हो जाती है। यह निष्कर्ष वास्तविक गैसों के लिए सत्य नहीं है, केवल आदर्श गैस के लिए ही सत्य है।

रुद्धोष्म प्रक्रम (Adiabatic process)– जब ऊष्मागतिक निकाय में होने वाले किसी प्रक्रम के अन्तर्गत ऊष्मा न तो बाहर से निकाय के अन्दर जा सके और न ही ऊष्मा निकाय से बाहर आ सके अर्थात् $Q = 0$ तो ऐसे प्रक्रम को रुद्धोष्म प्रक्रम कहते हैं।

अत: इस दशा में ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम

$\Delta U = Q - W$ के अनुसार

$$\Delta U = 0 - W \text{ या } \Delta U = -W \quad ...(1)$$

अर्थात् रुद्धोष्म प्रक्रम में निकाय की आन्तरिक ऊर्जा में परिवर्तन कार्य के बराबर होता है।

प्रश्न 14. निम्नलिखित पर संक्षिप्त टिप्पणी लिखिए– **(2010, 2015)**

(*i*) ऊष्मागतिकी का शून्यवां नियम (Zeroth law of thermodynamics)

(*ii*) ऊष्मागतिकी का प्रथम नियम (First law of thermodynamics)

(*iii*) ऊष्मागतिकी का द्वितीय नियम (Second law of thermodynamics)

उत्तर– (*i*) ऊष्मागतिकी का शून्यवां नियम– यदि दो ऊष्मागतिक निकाय किसी तीसरे ऊष्मागतिक निकाय के साथ अलग-अलग तापीय साम्य अर्थात् ऊष्मीय साम्य में हैं तो वे परस्पर भी ऊष्मीय साम्य में होंगे।

(*ii*) ऊष्मागतिकी का प्रथम नियम–(2016) ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम का गणितीय स्वरूप निम्न है–

$$Q = \Delta U + W \qquad ...(i)$$

समी. (1) को शब्दों में निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है–

"किसी ऊष्मागतिकी निकाय को दी गई ऊष्मा Q (अर्थात् निकाय द्वारा अवशोषित ऊष्मा) दो भागों में प्रयुक्त होती है- (*i*) निकाय द्वारा बाह्य दाब के विरुद्ध कार्य (W) करने में तथा (*ii*) निकाय की आन्तरिक ऊर्जा में परिवर्तन (ΔU) करने में।"

(*iii*) ऊष्मागतिकी का द्वितीय नियम–

(*A*) क्लासियस का कथन– क्लासियस ने सन् 1880 में इसको निम्नलिखित रूप दिया था–

"किसी भी स्वत: क्रिया मशीन के लिए, जिसे कोई भी बाह्य स्रोत की सहायता प्राप्त न हो, ऊष्मा को ठण्डी वस्तु से गर्म वस्तु पर अथवा ऊष्मा को अल्प ताप से उच्च ताप पर पहुँचाना असम्भव है।

(*B*) केल्विन प्लांक का कथन– इस प्रकार की किसी भी मशीन का निर्माण असम्भव है जो चक्रीय प्रक्रम में किसी स्रोत से ऊष्मा अवशोषित करने और उसे पूरी तरह कार्य में बदलने के अलावा अन्य कोई प्रभाव उत्पन्न न करे।

प्रश्न 15. ऊष्मा इंजन क्या है? इसके प्रकारों का उल्लेख कीजिए।

उत्तर– ऊष्मा इंजन (Heat engine)– "वह युक्ति जो ऊष्मीय ऊर्जा को यांत्रिक कार्य में बदल देती है, ऊष्मा इंजन कहलाती है।"

ऊष्मा इंजन मुख्यत: तीन प्रकार के होते हैं–

(*i*) भाप इंजन (Steam Engine)– इनमें जल वाष्प को कार्यकारी पदार्थ के रूप में प्रयुक्त करते हैं। यह इंजन रेलगाड़ियों को चलाने में प्रयुक्त किये जाते थे।

(*ii*) आन्तरिक दहन इंजन (Internal Combustion Engine)– इनमें वायु तथा पेट्रोल या डीजल के मिश्रण को कार्यकारी पदार्थ के रूप में प्रयुक्त किया जाता है। ये, इंजन मोटर चलाने के काम में आते हैं।

(*iii*) वाष्प तथा गैस टरबाइन (Steam and Gas Turbine)– इनका प्रयोग विद्युत प्रतिष्ठानों, जेट इंजन तथा रॉकेट निर्माण में किया जाता है। इनमें वायु तथा ऑक्सीकारक पदार्थ का मिश्रण कार्यकारी पदार्थ के रूप में प्रयुक्त किया जाता है।

प्रश्न 16. ऊष्मा इंजन के मुख्य भागों का वर्णन उनकी विशेषताओं के साथ कीजिये।

उत्तर–ऊष्मा इंजन के मुख्य भाग– किसी भी ऊष्मा इंजन में मुख्य रूप से तीन भाग होते हैं–

(1) ऊष्मा-स्रोत (Source of Heat)– जो वस्तु लगातार एक निश्चित ताप पर ऊष्मा दे सकती है उसे ऊष्मा-स्रोत कहते हैं।

ऊष्मा-स्रोत की विशेषताएँ

(*i*) इसका ताप चारों ओर के वातावरण के ताप से बहुत अधिक होता है और सदैव निश्चित (T_1) रहता है। वह न तो कम होता है और न ही अधिक।

(*ii*) इसकी ऊष्माधारिता (heat capacity) अनन्त होती है। इसका अर्थ है कि स्रोत से कितनी ही ऊष्मा निकाल ली जाये, उसका ताप कम नहीं होता है अर्थात् निश्चित (T_1) ही बना रहता है।

(2) ऊष्मा सिंक (Sink of Heat)– स्रोत की अपेक्षा निम्न ताप (T_2) पर यह एक ऐसी वस्तु होती है, जिसे चाहे जितनी भी ऊष्मा दे दी जाए, इसका ताप बढ़ता नहीं है अर्थात् T_2 ही रहता है।

सिंक की विशेषताएँ

(*i*) इसकी ऊष्माधारिता अनन्त होती है, इसीलिए इसको चाहे कितनी ही ऊष्मा दे दी जाए, इसका ताप सदैव नियत ही रहता है।

(*ii*) इसका ताप सदैव नियत (T_2) रहता है तथा $T_2 < T_1$.

उदाहरण– व्यवहार में सबसे अच्छा ऊष्मा सिंक **वायुमण्डल** होता है।

(3) कार्यकारी पदार्थ (Working Substance)– भाप, पेट्रोल, डीजल आदि जो पदार्थ ऊष्मा इंजन में प्रयुक्त किये जाते हैं, उन्हें कार्यकारी पदार्थ कहते हैं। कार्यकारी पदार्थ स्रोत से ऊष्मा, ऊँचे ताप (T_1) पर ग्रहण करता है, उसके कुछ हिस्से को उपयोगी कार्य में बदलता है और शेष को निम्न ताप (T_2) पर सिंक को दे देता है।

उदाहरण– कार्नो इंजन का कार्यकारी पदार्थ आदर्श गैस, भाप-इंजन में पानी की भाप और ऑटो इंजन (आन्तरिक दहन इंजन) में कार्यकारी पदार्थ होती है।

प्रश्न 17. कार्नोट या कार्नो चक्र को विस्तार में समझाइये।

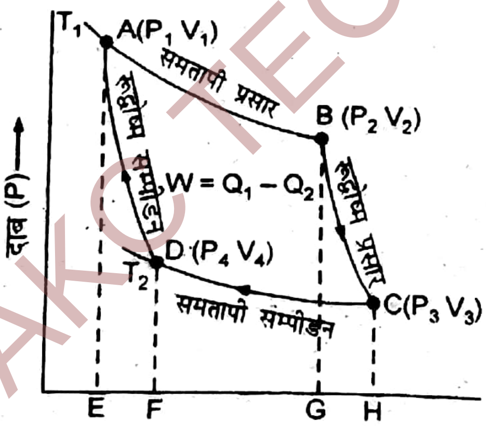
(2013)

उत्तर– कार्नोट चक्र (Carnot cycle)– कार्नो चक्र में कार्यकारी पदार्थ पर किये जाने वाले चार ऊष्मागतिकी प्रक्रम तथा उनका क्रम निम्नलिखित प्रकार से होता है–

(a) समतापी प्रसार, (b) रूद्धोष्म प्रसार,

(c) समतापी सम्पीडन, (d) रूद्धोष्म सम्पीडन।

इसको निम्नांकित चित्र– में दर्शाये गये सूचक आरेख द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है। कार्नो चक्र के चारों प्रचालनों को समझाने के लिए माना कार्यकारी पदार्थ (आदर्श गैस) का 1 ग्राम मोल $T_1 K$ पर सिलिण्डर में लिया जाता है। इस अवस्था में माना गैस का दाब P_1 तथा आयतन V_1 है। इसको सूचक आरेख पर A बिन्दु द्वारा दर्शाया गया है।



चित्र-7.

***(a)* समतापी प्रसार**– माना अब सिलिण्डर को उठाकर $T_1 K$ वाले ऊष्मा-स्रोत के सम्पर्क में रख दिया जाता है तथा पिस्टन को धीरे-धीरे चलने दिया जाता है जिससे गैस का समतापीय प्रसार हो सके। क्योंकि सिलिण्डर का आधार पूर्ण चालक है तथा स्रोत के सम्पर्क में है इसलिए आदर्श गैस के समतापीय प्रसार के लिए आवश्यक ऊष्मा Q_1 स्रोत से प्राप्त होती हैं तथा प्रसार के समय ताप T_1 स्थिर बना रहता है।

यह प्रक्रिया तब तक की जाती है जब तक कि सूचक आरेख पर स्थित बिन्दु B द्वारा प्रदर्शित अवस्था प्राप्त नहीं हो जाती है। सूचक आरेख पर यह प्रसार प्रक्रिया समतापी वक्र AB द्वारा दर्शायी गयी है। माना बिन्दु B के संगत दाब तथा आयतन क्रमशः V_1 तथा V_2 हैं।

समतापीय प्रसार में ताप स्थिर रहने के कारण आन्तरिक ऊर्जा में परिवर्तन शून्य होगा। अतः ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम की समीकरण $Q = \Delta U + W$ से स्रोत से अवशोषित ऊष्मा की मात्रा $Q_1 = W_1$ जहाँ कार्यकारी पदार्थ द्वारा किया गया कार्य W_1 = क्षेत्रफल $ABGEA$

अथवा $$W_1 = Q_1 = RT_1 \cdot \log_e\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \quad ...(1)$$

***(b)* रूद्धोष्म प्रसार**–अब सिलिण्डर को स्रोत से हटाकर उसके आधार को पूर्णतया अचालक स्टैण्ड के सम्पर्क में रखते हैं। पिस्टन अपने जड़त्व के कारण स्वतः ऊपर चलता है जिससे आदर्श गैस का रूद्धोष्म प्रसार होता है क्योंकि सिलिण्डर तथा स्टैण्ड पूर्ण अचालक होने से गैस को न तो वातावरण से ऊष्मा मिल पाती है और न ही अन्दर की ऊष्मा बाहर जा पाती है। पिस्टन को ऊपर उठाने में कार्यकारी पदार्थ अपनी आन्तरिक ऊर्जा व्यय करता है जिससे ताप गिरने लगता है। यह प्रसार तब तक किया जाता है जब तक कि ताप सिंक के ताप $T_2 K$ के बराबर नहीं हो जाता। सूचक आरेख में वक्र BC कार्यकारी पदार्थ के रूद्धोष्म प्रसार को व्यक्त करता है अर्थात् यह रूद्धोष्म वक्र है। यदि बिन्दु C पर दाब P_3 तथा आयतन V_3 हो तो पदार्थ द्वारा B से C तक रूद्धोष्म प्रसार में किया गया कार्य W_2 = क्षेत्रफल $BCHGB$.

अथवा $$W_2 = \frac{R}{1-\gamma}(T_1 - T_2) \quad .... (2)$$

इस अवस्था में $Q = 0$ अतः $\Delta U = Q - W$ से–

$$\Delta U = -W_2$$

जहाँ (–) चिन्ह आन्तरिक ऊर्जा में कमी का प्रतीक है, जिससे ताप गिरता है।

(c) समतापी सम्पीडन–बिन्दु C पर आदर्श गैस का ताप गिरकर सिंक के ताप $T_2 K$ के बराबर हो जाता है तथा दाब भी बहुत कम हो जाता है। गैस में कार्य करने की सामर्थ्य समाप्त हो जाती है। कार्य करने की सामर्थ्य को गैस

द्वारा पुनः प्राप्त करने के लिए उसे प्रारम्भिक स्थिति में लाया जाता है। अतः अब सिलिण्डर को स्टैण्ड से उतारकर सिंक B पर रख देते हैं। पिस्टन को बहुत धीरे-धीरे नीचे की ओर चलाते हैं; जब तक दाब P_4 तथा आयतन V_4 नहीं हो जाता है। ऐसा करने से कार्यकारी पदार्थ का समतापीय सम्पीडन होता है। पिस्टन द्वारा गैस पर कार्य होता है तथा पदार्थ (गैस) उत्पन्न ऊष्मा Q_2 को ताप T_2K पर सिंक को दे देता है तथा पदार्थ का ताप T_2K ही बना रहता है। सूचक आरेख पर यह समतापीय सम्पीडन वक्र CD द्वारा दर्शाया गया है अर्थात् यह समतापी वक्र है। इस दशा में गैस पर किया गया कार्य–

$$\Delta U = 0 \quad W_3 = -\text{ क्षेत्रफल } CHFDC$$

अतः $Q = \Delta U + W$ से $Q_2 = -W_3$ या $W_3 = -Q_2$

अर्थात् इस प्रक्रिया में गैस पर किया गया कार्य = सिंक द्वारा अवशोषित ऊष्मा की मात्रा

अर्थात् $$W_3 = -Q_2 = -RT_2 \log_e\left(\frac{V_3}{V_4}\right) \quad ...(3)$$

(d) रूद्धोष्म सम्पीडन– गैस को उसकी प्रारम्भिक अवस्था में लाने के लिए सिलिण्डर को सिंक से हटाकर पुनः अचालक स्टैण्ड पर रखते हैं तथा पिस्टन को नीचे की ओर दबाते हैं। इससे गैस और अधिक सम्पीडित होती है। यह सम्पीडन रूद्धोष्म होता है। यह प्रक्रिया तब तक जारी रखते हैं जब तक कि गैस का ताप T_2K दाब P_4 तथा आयतन V_4 से परिवर्तित होकर प्रारम्भिक ताप T_1 दाब P_1 तथा आयतन V_1 पर नहीं आ जाता। सूचक आरेख में बिन्दु A पर यह परिवर्तन इस आरेख में वक्र DA द्वारा प्रदर्शित है। अतः यह रूद्धोष्म सम्पीडन वक्र है। स्पष्ट है कि इस दशा में पिस्टन द्वारा कार्यकारी पदार्थ पर कार्य किया जाता है तथा यह कार्य गैस में आन्तरिक ऊर्जा के रूप में संचित हो जाता है जिससे उसका ताप T_2 से बढ़कर T_1 हो जाता है।

इस प्रक्रम में $Q = 0$ अतः $Q = \Delta U + W$ से–

$$\Delta U = -W$$

परन्तु रूद्धोष्म सम्पीडन में कार्य– $W_4 = -$ क्षेत्रफल $DFEAD$

$\therefore \Delta U = -(-W_4) = +$ क्षेत्रफल $DFEAD$ यहाँ (+) चिन्ह आन्तरिक ऊर्जा में वृद्धि का प्रतीक है।

यहाँ गैस पर किया गया कार्य

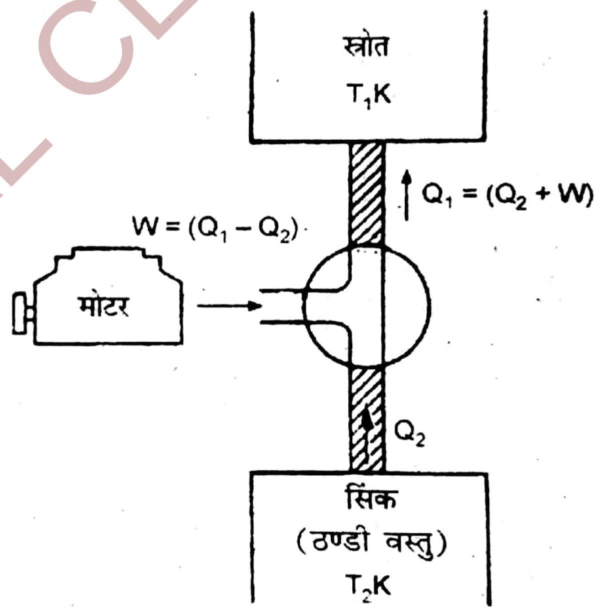
$$W_4 = \left[\frac{R(T_1 - T_2)}{\gamma - 1}\right] \quad ...(4)$$

इस प्रकार सम्पूर्ण एक चक्र में कार्यकारी पदार्थ पुनः अपनी प्रारम्भिक स्थिति में लौट आता है तथा यह फिर से पहले की तरह कार्य करने को तैयार हो जाता है। निरन्तर कार्य करने के लिए इस चक्र को बार-बार दोहराया जाता है।

प्रश्न 18. प्रशीतक क्या है? इसके मुख्य भागों एवं उनके कार्यों का वर्णन कीजिये।

उत्तर–प्रशीतक (Refrigerator) – प्रशीतक एक ऐसी युक्ति है जो ऊष्मा को निम्न ताप की वस्तु से लेकर उच्च ताप की वस्तु में स्थानान्तरित कर देती है।

प्रशीतक में अग्र लिखित मुख्य चार भाग होते हैं–



चित्र–8.

(i) स्रोत– उच्च ताप T_1 पर अनन्त ऊष्माधारिता वाली वस्तु को स्रोत कहते हैं। प्रशीतक ठण्डी वस्तु से ऊष्मा लेकर इसी स्रोत में ऊष्मा का परित्याग करता है। रेफ्रिजरेटर के लिए खुला कमरा ही स्रोत का कार्य करता है। दूसरे शब्दों में रेफ्रिजरेटर से बाहर का वातावरण ही स्रोत का कार्य करता है।

(ii) सिंक– निम्न ताप T_2 ठण्डी वस्तु ही सिंक का कार्य करती है।

(iii) कार्यकारी पदार्थ– रेफ्रिजरेटर में कार्यकारी पदार्थ सामान्यतया द्रव अमोनिया या फ्रीऑन होता हैं। प्रशीतक चक्र की सभी क्रियाएँ और परिवर्तन कार्यकारी पदार्थ पर ही सम्पन्न किए जाते हैं। इसको शीतलक (coolent) कहते हैं।

(*iv*) **विद्युत मोटर**–जो कार्यकारी पदार्थ पर कार्य करने के लिए प्रयुक्त होता है।

प्रश्न 19. भिन्न-भिन्न पदार्थों से बने किन्तु समान आकार, नाप और दीवारों की मोटाई वाले दो बर्तनों A तथा B में बर्फ भरकर एक ही स्थान पर रख दिया जाता है। A तथा B में क्रमशः 100 ग्राम प्रति मिनट तथा 150 ग्राम प्रति मिनट की दर से बर्फ पिघल रही है। यह मानकर कि ऊष्मा दोनों बर्तनों में दीवारों से होकर ही प्रवेश करती है। उनके पदार्थों की ऊष्मा चालकताओं का अनुपात ज्ञात कीजिए।

उत्तर– माना बर्तन A तथा B के पदार्थों के ऊष्मा चालकता गुणांक क्रमशः K_A तथा K_B, प्रत्येक की सभी दीवारों का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल a तथा कुल मोटाई l है। माना इन बर्तनों में समान समय $t = 1$ मिनट में पिघलने वाली बर्फ की मात्राएँ क्रमशः m_A व m_B हैं। चूँकि दोनों बर्तनों के अन्दर बर्फ है, अर्थात् दोनों के अन्दर का ताप 0°C तथा बाहर का ताप भी समान हैं। अतः दोनों के अन्दर व बाहर तापान्तर $(\theta_1 - \theta_2)$ समान होगा।

अतः सूत्र $Q = KA\,(\theta_1 - \theta_2)\,t/l$ के आधार पर इन बर्तनों में प्रवेश करने वाली ऊष्मा की मात्राएँ क्रमशः

$$Q_A = \frac{K_A \times a \times (\theta_1 - \theta_2)t}{t}$$

तथा $$Q_B = \frac{K_B \times a \times (\theta_1 - \theta_2)t}{t}$$

अतः $$\frac{Q_A}{Q_B} = \frac{K_A}{K_B} \quad \text{...(1)}$$

परन्तु $Q_A = m_A \times L$ तथा $Q_B = m_B \times L$ ...(2)

अर्थात् $Q_A/Q_B = m_A/m_B$

अतः समीकरण (1) व (2) से

$$\frac{K_A}{K_B} = \frac{m_A}{m_B} = \frac{100 \text{ ग्राम}}{150 \text{ ग्राम}} = \frac{2}{3}$$

अर्थात् $K_A : K_B = 2:3$

प्रश्न 20. तीन थर्मामीटर A, B तथा C के पाठ्यांक क्रमशः 36°C, 32°C एवं 27°C है। A मनुष्य के शरीर एवं बनियान के बीच, B बनियान एवं कमीज के बीच तथा C कमीज एवं कोट के बीच लगा है। यदि बनियान एवं कमीज समान मोटाई की हो, तो उनके ऊष्मा चालकता गुणांकों की तुलना कीजिये।

उत्तर– माना बनियान व कमीज के ऊष्मा चालकता गुणांक क्रमशः K_1 व K_2 हैं। बनियान व कमीज में ऊष्मा संचरण की दर समान होगी।

अतः सूत्र $H = KA\,(\Delta\theta)/l$ से–

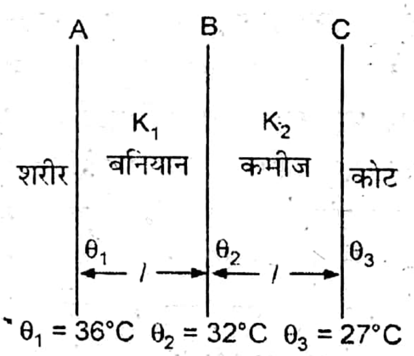
$$\frac{K_1 A(\theta_1 - \theta_2)}{l} = \frac{K_2 A(\theta_2 - \theta_3)}{l}$$

जहाँ l = बनियान व कमीज प्रत्येक की मोटाई; A = प्रत्येक का क्षेत्रफल

अतः $$\frac{K_1}{K_2} = \left(\frac{\theta_2 - \theta_3}{\theta_1 - \theta_2}\right)$$

$$= \frac{(32 - 27)°C}{(36 - 32)°C}$$

$$= \frac{5}{4}$$



चित्र-9.

अर्थात् $K_1 : K_2 = 5:4$

प्रश्न 21. वायुमण्डलीय दाब तथा 100°C पर 1.0 मीटर^3 जल से उसी ताप पर 1671 मीटर^3 जल वाष्प बनती है। जल के वाष्पन की गुप्त ऊष्मा 2.3×10^6 जूल प्रति किग्रा है। यदि 2.0 किग्रा जल को वायुमण्डलीय दाब तथा 100°C पर जल वाष्प में परिवर्तित किया जाये तो उसकी आन्तरिक ऊर्जा में कितनी वृद्धि होगी? (जल का घनत्व 1.0×10^3 किग्रा/मी^{3}, वायुमण्डलीय दाब = 1.01×10^5 न्यूटन/मीटर^2)

उत्तर– 2.0 किग्रा जल को 100°C पर जल वाष्प में बदलने के लिए जल को दी गयी ऊष्मा $Q = mL$

$\therefore Q = 2.0$ किग्रा $\times 2.3 \times 10^6$ जूल प्रति किग्रा $= 4.6 \times 10^6$ जूल

2 किग्रा जल का आयतन $= \dfrac{\text{द्रव्यमान}}{\text{घनत्व}}$

$$= \frac{2 \text{ किग्रा}}{1.0 \times 10^3 \text{ किग्रा/मी}^3}$$

$= 2 \times 10^{-3}$ मी^{3}

$\because$ 1 मी^{3} जल से बनी जल वाष्प का आयतन = 1671 मी^{3}

$\therefore$ 2×10^{-3} मी^{3} जल से बनी जल वाष्प का आयतन

$$= \frac{1671}{1} \times 2 \times 10^{-3} \text{ मी}^3$$

$= 3342 \times 10^{-3}$ मी^{3}

$\therefore$ 2 किग्रा जल को वायुमण्डलीय दाब पर वाष्प में बदलने में आयतन में परिवर्तन

$$\Delta V = (3342 \times 10^{-3} \text{ मी}^3 - 2.0 \times 10^{-3} \text{ मी}^3)$$

$= 3340 \times 10^{-3}$ मी^{3}

$\because$ वायुमण्डलीय दाब P के विरूद्ध किया गया कार्य

$W = P\Delta V$

$\because$ $W = (1.01 \times 10^5$ न्यूटन/मीटर$^2)$ $(3340 \times 10^{-3}$ मी$^3)$

$= 0.337 \times 10^6$ जूल

ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम से आन्तरिक ऊर्जा में वृद्धि

$\Delta U = Q - W$

$\therefore$ $\Delta U = 4.6 \times 10^6$ जूल $- 0.337 \times 10^6$ जूल

$= 4.263 \times 10^6$ जूल

प्रश्न 22. एक कार्नो इंजन 427°C तथा 27°C के मध्य कार्य करता है। इसकी दक्षता ज्ञात कीजिए।

उत्तर– यहाँ $T_1 = (427 + 273)\, K = 700K$

$T_2 = (27 + 273)\, K = 300K$

$\therefore$ दक्षता $\eta = 1 - \left(\dfrac{T_2}{T_1}\right) = 1 - \left(\dfrac{300}{700}\right)$

$= \dfrac{400}{700} = \dfrac{4}{7} = \mathbf{0.57}$

$\therefore$ प्रतिशत दक्षता $= 0.57 \times 100\% = \mathbf{57\%}$

प्रश्न 23. एक कार्नो इंजन 300 कैलोरी ऊष्मा 500K पर प्राप्त करता है और 150 कैलोरी ऊष्मा सिंक को निष्कासित करता है। सिंक के ताप की गणना कीजिए।

उत्तर– यहाँ ऊष्मा-स्रोत से प्राप्त ऊष्मा

$Q_1 = 300$ कैलोरी,

स्रोत का ताप $T_1 = 500K$

सिंक को दी गयी ऊष्मा $Q_2 = 150$ कैलोरी,

सिंक का ताप $T_2 = ?$

$\because$ $\dfrac{Q_1}{Q_2} = \dfrac{T_1}{T_2}$

अतः $T_2 = \dfrac{Q_2}{Q_1} \times T_1$

$= \left(\dfrac{500}{300} \times 150\right) K = 250\, K$

प्रश्न 24. कार्नो इंजन में स्रोत व सिंक के ताप क्रमशः 500K और 375 K हैं। यदि इंजन स्रोत से 600 किलो-कैलोरी ऊष्मा प्रति चक्र अवशोषित करता है तो गणना कीजिए–

(i) प्रति चक्र किया गया कार्य,

(ii) प्रति चक्र सिंक को दी गयी ऊष्मा।

उत्तर– यहाँ $T_1 = 500K$

$T_2 = 375\, K;$

$Q_1 = 600$ किलो-कैलोरी

(i) सूत्र $\eta = \dfrac{W}{Q_1} = 1 - \left(\dfrac{T_2}{T_1}\right)$ से,

प्रति चक्र किया गया कार्य

$$W = Q_1 \left[\frac{T_1 - T_2}{T_1}\right]$$

$= 600\left(\dfrac{500 - 375}{500}\right)$ किलो-कै॰

$= \dfrac{600 \times 125}{500}$ किलो-कैलोरी

= 150 किलो-कैलोरी

(ii) प्रति चक्र सिंक को दी गयी ऊष्मा

$Q_2 = Q_1 - W$

$= (600 - 150)$ किलो-कैलोरी

= 450 किलो-कैलोरी

प्रश्न 25. एक कार्नो प्रशीतित्र 0°C पर जल से ऊष्मा लेता है और इसे 27°C पर कमरे को दे देता है। यदि 0°C के 100 kg जल को 0°C के बर्फ में बदलता हो तो कितने जूल कार्य की आवश्यकता होगी?

(बर्फ की गुप्त ऊष्मा = 3.4 × 10⁵ जूल/किग्रा.)

उत्तर– यहाँ

$Q_1 = ?$, $Q_2 = m \times L = 100$ किग्रा $\times 3.4 \times 10^5$ जूल/किग्रा.)

$$= 3.4 \times 10^7 \text{ जूल}$$

$$T_1 = (27 + 273)\text{ K} = 300\text{ K}$$

तथा $$T_2 = (0 + 273)\text{ K} = 273\text{ K}$$

$$\because \quad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow Q_1 = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)Q_2$$

$$\therefore \quad Q_1 = \frac{300K}{273K} \times 3.4 \times 10^7 \text{ जूल}$$

$$= 3.736 \times 10^7 \text{ जूल}$$

$\therefore$ प्रशीतित्र पर किया गया कार्य

$$W = Q_1 - Q_2$$

$$= (3.736 \times 10^7 - 3.4 \times 10^7) \text{ जूल}$$

$$= 3.36 \times 10^6 \text{ जूल}$$

प्रश्न 26. एक आदर्श रेफ्रीजरेटर को चलाने वाली मोटर की सामर्थ्य 200 वाट है। फ्रीजर कक्ष का ताप 0°C तथा बाहर की वायु का ताप 27°C है। ज्ञात कीजिये (*i*) फ्रीजर कक्ष से ली गई ऊष्मा, (*ii*) बाहर की वायु को दी गई ऊष्मा।

उत्तर– यहाँ

$$T_1 = 27°\text{C} = 300\text{ K}$$

$$T_2 = 0°\text{C} = 273\text{ K}$$

$$W = 200 \text{ वाट} = 200 \text{ जूल/सेकण्ड।}$$

(*i*) माना रेफ्रीजरेटर में कार्यकारी पदार्थ फ्रीजर कक्ष (ताप T_2) से ऊष्मा Q_2 लेता है तथा बाहर की वायु (ताप T_1) को ऊष्मा Q_1 देता है तो

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_2}{T_2} = \frac{300}{273} \quad ...(1)$$

बाहर ऊर्जा स्रोत (मोटर) द्वारा किया गया कार्य

$$W = Q_1 - Q_2$$

या $$200 = Q_1 - Q_2 \quad ...(2)$$

समीकरण (1) व समीकरण (2) को हल करने पर–

$$Q_1 = 2222.2 \text{ जूल/सेकण्ड}$$

तथा $$Q_2 = 2022.2 \text{ जूल/सेकण्ड}$$

अर्थात् (*i*) फ्रीजर कक्ष से ली गयी ऊष्मा $= Q_2 =$ 2022.2 जूल/सेकण्ड

(*ii*) बाहर की वायु को दी गयी ऊष्मा $= Q_1 = 2222.2$ जूल/सेकण्ड

प्रश्न 27. पारे का काँच के सापेक्ष आभासी प्रसार गुणांक 0.00015 प्रति °C है। इसका वास्तविक प्रसार गुणांक 0.00018 प्रति °C है। काँच का रेखीय प्रसार गुणांक ज्ञात कीजिए।

उत्तर– पारे का वास्तविक प्रसार गुणांक

$$(y_r) = 0.00018 \text{ प्रति °C}$$

पारे का आभासी गुणांक

$$(y_a) = 0.00015 \text{ प्रति °C}$$

माना काँच का आयतन प्रसार गुणांक y_g है।

$$\gamma_r = \gamma_a + \gamma_g$$

$$\gamma_r = \gamma_r - \gamma_a$$

$$\gamma_r = 0.00018 - 0.00015$$

$$\gamma_r = 0.00003$$

कांच का रेखीय प्रसार गुणांक

$$(\alpha_g) = \frac{\gamma_g}{3}$$

$$\alpha_g = 0.00003$$

$$= 0.00001/°\text{C}$$

प्रश्न 28. 100 °C ताप बढ़ाने पर छड़ की लम्बाई 0.2% बढ़ जाती है। छड़ के पदार्थ का रेखीय प्रसार गुणांक ज्ञात करो।

उत्तर– $$\alpha = \frac{\Delta L}{L\Delta t}$$

$$\frac{\Delta L}{L} = 0.2\% = 0.2 \times 10^{-2}$$

$$\Delta t = 100°\text{C}$$

$$\alpha = \frac{0.2 \times 10^{-2}}{100} = 2 \times 10^{-5} \text{ प्रति °C}$$

उत्तर प्रदेश डिप्लोमा

प्रथम सेमेस्टर, सॉल्वड पेपर दिसम्बर-2018

अनुप्रयुक्त भौतिकी-I
(APPLIED PHYSICS-I)

समय: 1.00 घण्टा

पूर्णांक : [illegible]

नोट- सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

प्रश्न 1. किन्हीं दस खण्डों के उत्तर दीजिए। **[$10 \times 1 = 10$]**

(i) निम्न में से किस भौतिक राशि की विमा नहीं होती है, लेकिन मात्रक होता है।

(अ) विकृति (ब) कोण (स) ऊर्जा

उत्तर– (ब) कोण

(ii) मापी गयी राशि 20.030 से कितने सार्थक अंक हैं?

(अ) 2 (ब) 4 (स) 5

उत्तर– (स) 5

(iii) निम्न भौतिक राशियों में कौन-सी सदिश राशि नहीं है-

(अ) आवेग (ब) संवेग (स) सामर्थ्य

उत्तर– (स) सामर्थ्य

(vi) रेखीय और कोणीय त्वरण में सम्बन्ध लिखिए।

उत्तर– $a = \alpha r$

(v) एक कण 'r' त्रिज्या के वृत्तीय पथ पर समान चाल V से गति करता है। एक चौथाई आवर्त काल में इसका विस्थापन कितना होगा?

उत्तर– $T_{60} = \dfrac{\pi r}{3v}$

(vi) निम्नलिखित में कौन-सा कथन सत्य है-

(अ) वृत्तीय गति से शक्ति क्षय नहीं होता है।

उत्तर– सत्य

(ब) घर्षण बल सम्पर्क सतहों के क्षेत्रफल के अनुक्रमानुपाती होता है।

उत्तर– असत्य

(स) वस्तु द्वारा किया गया कार्य (ΔW) और इसकी ऊर्जा में परिवर्तन (ΔU) के मध्य सम्बन्ध $\Delta W = \Delta U$ होता है।

उत्तर– असत्य

(vii) स्थैतिक घर्षण गुणांक (μ_s), गतिज घर्षण गुणांक (μ_k) और घूर्णन घर्षण गुणांक (μ_r) में सम्बन्ध है।

(अ) $\mu s > \mu k > \mu r$ (ब) $\mu s > \mu r > \mu k$

(स) $\mu k > \mu r > \mu s$

उत्तर– (अ)

(viii) जब एक वस्तु ऊर्ध्वाधर अक्ष के परितः घूर्णन गति करती है तो इसके कोणीय संवेग और आरोपित बल-आघूर्ण के मध्य कोण कितना होता है?

उत्तर– 90°

(ix) "घूर्णन गति में, किसी वस्तु की घूर्णन त्रिज्या (K) उसके द्रव्यमान पर निर्भर करती है।" यह कथन सत्य है अथवा असत्य?

उत्तर– सत्य

(x) पृथ्वी तल पर m द्रव्यमान वाली वस्तु की पलायन ऊर्जा का सूत्र लिखिए।

उत्तर– $V_e = \sqrt{2g\,Re}$

(xi) द्रवों की श्यानता पर ताप वृद्धि का क्या प्रभाव पड़ता है?

उत्तर– ताप बढ़ने में द्रवों की श्यानता घट जाती है तथा ताप बढ़ने पर गैसों की श्यानता बढ़ जाती है।

(xii) ऊष्मागतिकी का कौन-सा नियम तापीय संतुलन से सम्बन्धित है?

उत्तर– Zeroth law

प्रश्न 2. किन्हीं पाँच खण्डों के उत्तर दीजिए: **[5 × 2 = 10]**

(i) विमीय विश्लेषण की सीमाओं का उल्लेख कीजिए।

उत्तर—विमीय विश्लेषण की सीमाएं— कृपया पृष्ठ संख्या 12 पर प्रश्न संख्या 12 देखें।

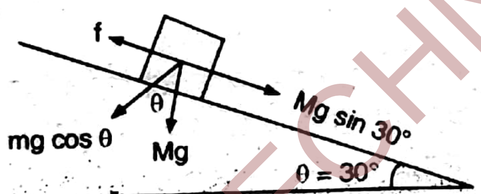
(ii) दो सदिशों के अदिश और सदिश गुणनफल से आप क्या समझते हैं?

उत्तर— दो सदिशों के अदिश गुणनफल— दो वेक्टरों का स्केलर गुणनफल किसी एक वेक्टर के परिणाम तथा उसकी दिशा में दूसरे वेक्टर के घटक के परिणाम अर्थात् उस वेक्टर पर दूसरे वेक्टर के प्रक्षेप के गुणनफल के बराबर होता है।

दो सदिशों के सदिश गुणनफल— दो वेक्टरों का वेक्टर गुणनफल एक सदिश राशि ही है जिसका परिणाम दोनों वेक्टरों के परिणामों तथा उनके बीच के कोण की ज्या के गुणनफल के बराबर होता है तथा इसकी दिशा दोनों वेक्टरों के उभयनिष्ठ तल के लम्बवत् होती है और दक्षिणावर्त पेंच नियम द्वारा निर्धारित की जाती है।

(iii) क्षैतिज से, 30° ढलान वाले नत तल प्रर एक गुटका ठीक स्थिर अवस्था में स्थित है। गुटके और तल के मध्य घर्षण गुणांक कितना है? (g = 10 m/s²)

उत्तर—



$$\mu N = Mg\sin\theta$$

$$\mu Mg\cos\theta = Mg\sin\theta$$

$$\mu = \tan\theta$$

$$\mu = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{1.73} = 0.578$$

(iv) उन कारकों का उल्लेख कीजिए जिन पर घूर्णन करते हुए एक दृढ़ पिंड का जड़त्व आघूर्ण निर्भर करता हैं। जड़त्व आघूर्ण का भौतिक महत्व बताइए।

उत्तर— घूर्णन करते हुए किसी एक पिंड का जड़त्व आघूर्ण निम्न बातों पर निर्भर करता है—

(i) पिण्ड के अन्दर द्रव्यमान का वितरण

(ii) घूर्णन अक्ष की स्थिति

जड़त्व आघूर्ण का भौतिक महत्व— कृपया पृष्ठ संख्या 56 पर प्रश्न संख्या 9 देखें।

(v) 'ध्रुवीय उपग्रह' क्या है? इसके उपयोग बताइए।

उत्तर— ध्रुवीय उपग्रह और इसका उपयोग— कृपया पृष्ठ संख्या 74 पर प्रश्न संख्या 13 देखें।

(vi) सम्पर्क कोण की परिभाषा कीजिए। केशनली में द्रव के उन्नयन को यह किस प्रकार प्रभावित करता है?

उत्तर— सम्पर्क कोण— कृपया पृष्ठ संख्या 86 पर प्रश्न संख्या 15 देखें।

(vii) समतापीय और स्थिरोष्म प्रक्रियाओं में अन्तर समझाइए।

उत्तर— समतापीय और स्थिरोष्म प्रक्रिया में अन्तर— कृपया पृष्ठ संख्या 106 पर प्रश्न संख्या 13 देखें।

प्रश्न 3. किन्हीं दो खण्डों को हल कीजिए- **[2 × 5 = 10]**

(i) ρ घनत्व और T पृष्ठ तनाव वाले द्रव की सतह पर बनी लघु तरंगों की चाल $V\sqrt{\frac{2\pi T}{\rho\lambda}}$ है, जहाँ λ तरंगदैर्घ्य है। विमीय विधि द्वारा इसकी प्रमाणिकता की पुष्टि कीजिए।

उत्तर— सूत्रानुसार $V = \sqrt{\frac{2\pi T}{\rho\lambda}}$

$$V \text{ की विमा} = \sqrt{\frac{2\times\pi\times T \text{ की विमा}}{P \text{ की विमा} \times \lambda \text{ की विमा}}}$$

विमीय निर्धारण करने पर

$$V \text{ की विमा } \frac{L}{T} = \frac{T \text{ की विमा } \frac{MLT^{-2}}{L} = [MT^{-2}]}{[ML^{-3}]\times[L]}$$

$$\frac{L}{T} = \frac{MT^{-2}}{ML^{-3}L}$$

$$\frac{L}{T} = \frac{MT^{-2}}{ML^{-3}L}$$

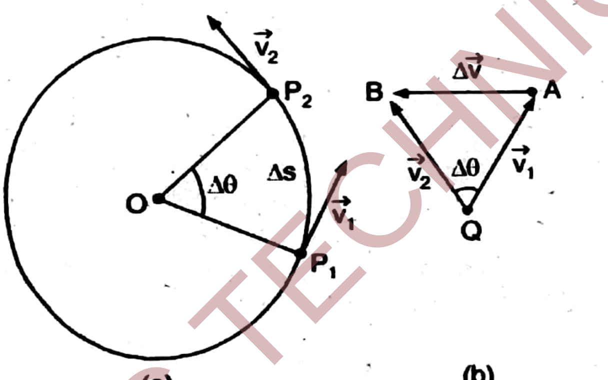
$$[LT^{-2}] = \frac{[MT^{-2}]}{[ML^{-3}][L]}$$

$$\boxed{[LT^{-2}] = [LT^{-2}]}$$ **Proved.**

(ii) अभिकेन्द्रीय त्वरण की परिभाषा कीजिए।

'r' त्रिज्या के वृत्तीय पथ पर 'v' चाल से घूमते हुए एक कण के लिए अभिकेन्द्रीय त्वरण का व्यंजक प्राप्त कीजिए।

उत्तर–अभिकेन्द्र त्वरण (Centripetal Acceleration) – वेग एक सदिश राशि है जिसमें परिमाण व दिशा दोनों होते हैं। वेग का परिमाण ही चाल होती है। वेग का परिमाण तथा दिशा दोनों में से किसी एक के अथवा दोनों के बदलने से वेग बदल जाता है। जब कोई कण एक समान वृत्तीय गति करता है तो कण की चाल (वेग का परिमाण) तो नियत रहती है, परन्तु उसकी गति करने की दिशा (वेग की दिशा) समय के साथ निरन्तर बदलती रहती है। अतः वृत्तीय गतिमान कण का वेग-सदिश निरन्तर बदलता रहता है। वेग-परिवर्तन की समय-दर त्वरण कहलाती है। इसलिए एक समान वृत्तीय गति करते हुए कण में त्वरण होता है जिसकी दिशा सदैव वृत्ताकार पथ के केन्द्र की ओर पायी जाती है, इसीलिए इस त्वरण को 'अभिकेन्द्र त्वरण' कहते हैं।



अभिकेन्द्र त्वरण के लिए व्यंजक– माना कि कोई कण r त्रिज्या के वृत्ताकार पथ पर एकसमान चाल v से गति कर रहा है। बिन्दु O इसके वृत्ताकार पथ का केन्द्र है (चित्र (a))। हम जानते हैं कि वृत्ताकार पथ के प्रत्येक बिन्दु पर कण के वेग की दिशा उस बिन्दु पर स्पर्श रेखा की दिशा में होती है।

माना कण पथ के बिन्दु P_1 से P_2 तक चलने में Δs दूरी तय करता है तथा उस दूरी को तय करने में सूक्ष्म समयान्तराल Δt लगता है।

माना कि इन बिन्दुओं पर कण के वेग क्रमशः $\overline{v_1}$ व $\overline{v_1}$ हैं। इन वेक्टर $\overline{v_1}$ व $\overline{v_2}$ दोनों का परिमाण v ही है, परन्तु इनकी दिशाओं में $\Delta\theta$ कोण का अन्तर है। P_1 से P_2 तक कण के वेग में परिवर्तन $\overline{v_2} - \overline{v_1} = \Delta\bar{v}$ है। इस वेग-परिवर्तन को चित्र (b) में दिखाये गये वेक्टर आरेख से ज्ञात करते हैं।

चित्र (b) में वेक्टर $\overline{v_1}$ तथा $\overline{v_2}$ एक ही बिन्दु Q से $\Delta\theta$ झुकाव कोण पर खींचे गये हैं। वेक्टर $\overline{v_1}$ तथा $\overline{v_2}$ के बाणाग्रों को यदि हम एक तीसरे वेक्टर $\overline{AB}$ से मिलायें तो यह तीसरा वेक्टर वेग-परिवर्तन $\left(\overline{v_2} - \overline{v_1} = \Delta\bar{v}\right)$ को प्रदर्शित करेगा।

त्रिभुज OP_1P_2 तथा वेक्टर त्रिभुज QAB समरूप हैं, क्योंकि प्रत्येक त्रिभुज की दो भुजाएँ बराबर हैं तथा इनके बीच का कोण $\Delta\theta$ है।

$$\text{अतः}\quad \frac{P_1P_2}{P_1O} = \frac{AB}{AQ} \quad \text{अथवा} \quad \frac{\Delta s}{r} = \frac{\Delta v}{v}$$

(क्योंकि $P_1P_2 \approx \Delta s$; $P_1O = r$, AB की लम्बाई $= |\Delta\bar{v}| = \Delta v$ है तथा QA व QB प्रत्येक की लम्बाई v है अर्थात्

$$|\overline{v_1}| = |\overline{v_2}|$$

$$\text{अथवा}\quad \Delta v = \left(\frac{v}{r}\right)\Delta s$$

दोनों ओर Δt से भाग देने पर $\dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \left(\dfrac{v}{r}\right)\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

समयान्तराल Δt के अनन्त सूक्ष्म $(\Delta\tau \to 0)$ होने पर

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r}\left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}\right)$$

परन्तु परिभाषा से, $\displaystyle\lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right) = a$ (तात्क्षणिक त्वरण)

तथा $\displaystyle\lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = v$ (तात्क्षणिक वेग)

$$\therefore \quad a = \frac{v}{r} \times v$$

$$\text{अथवा}\quad \boxed{a = \frac{v^2}{r}} \quad \text{....(1)}$$

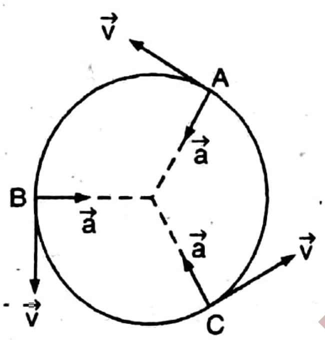
परन्तु रेखीय वेग $v = r\omega$

जहाँ $r =$ वृत्ताकार पथ की त्रिज्या तथा $\omega =$ कोणीय वेग

$\therefore$ अभिकेन्द्र त्वरण $a = \frac{(r\omega)^2}{r}$

अर्थात् $\boxed{a = r\omega^2}$ ....(2)

इस त्वरण की दिशा वही होगी जो वेग-परिवर्तन वेक्टर $\Delta\vec{v}$ की है। सीमा $\Delta t \to 0$ के अन्तर्गत $\Delta\theta$ भी अनन्त सूक्ष्म होगा $(\Delta\theta \to 0)$। ऐसी दशा में $\vec{v_1}$ तथा $\vec{v_2}$ सम्पाती होंगे तथा $\Delta\vec{v}$ वेक्टर दोनों वेक्टरों $\vec{v_1}$ तथा $\vec{v_2}$ के लम्बवत् होगा। इस प्रकार त्वरण $\vec{a}$ भी $\vec{v_1}$ तथा $\vec{v_2}$ दोनों के लम्बवत् होगा अर्थात् सदैव वृत्त के केन्द्र O की ओर दिष्ट रहगा (चित्र)देखें। त्वरण $\vec{a}$ के सदैव वेग $\vec{v}$ के लम्बवत् रहने के कारण इसको अभिलम्ब त्वरण (normal accelration) भी कहते हैं।



चूँकि अभिकेन्द्र त्वरण सदैव वृत्त की त्रिज्या के अनुदिश इसके केन्द्र की ओर दिष्ट रहता है, अत: इसको त्रिज्य त्वरण (radial acceleration) भी कहते हैं। इस प्रकार, इस त्वरण का परिमाण (v^2/r अथवा $r\omega^2$) सदैव अचर रहता है, परन्तु दिशा निरन्तर बदलती रहती है।

(iii) कार्य ऊर्जा प्रमेय का उल्लेख कीजिए।

किए गए कार्य की गणना कीजिए जब 2.0 kg का एक गुटका 10 N का बल लगाकर एक खुरदरी क्षैतिज सतह पर 5 m तक खींचा जाता है?

(गतिज घर्षण गुणांक, $\mu_k = 0.1, g = 10\ m/s^2$)

उत्तर– कार्य ऊर्जा प्रमेय– कृपया पृष्ठ संख्या 47 पर प्रश्न संख्या 12 देखें।

दिया है $m = 2\,kg$

शुद्ध बल $= 10\,kg$

दूरी $= 5\,m$

$\mu_k = 0.1, g = 10\,m/s^2$

घर्षण द्वारा बल $= mg\,\mu_K$

$= 2 \times 10 \times 0.1$

$= 2\,N$

ब्लॉक पर कुल लगा बल $= 10\,n - 2\,N = 8\,N$

ब्लॉक द्वारा किया गया कार्य = ब्लॉक पर लगा शुद्ध बल × दूरी

$= 8\,N \times 5$ meter

$= 40\,N\text{-}m.$

प्रश्न 4. किन्हीं दो खण्डों को हल कीजिए: [2 × 5 = 10]

(i) 'R' त्रिज्या का एक गोला क्षैतिज से $\angle\theta$ कोण पर झुके हुए तल पर घूर्णन गति प्रारम्भ करता है। इसके रेखीय त्वरण के लिए व्यंजक व्युत्पन्न कीजिए।

उत्तर– The object angular acceleration is related to linear acceleration of the edge that contact the incline by

$$a = R\alpha$$

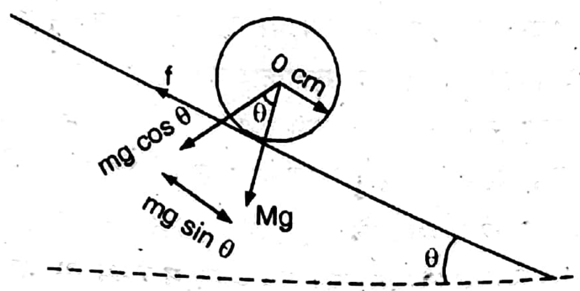
$\therefore$ गोला बिना फिसलन के रोल करता है तो इसका समान परिणाम होगा जो a_{cm} का है

$$\alpha = \frac{a_{cm}}{R}$$

$$\because \quad \text{Mg}\sin\theta - \frac{1}{R}\alpha = \text{Ma}_{cm}$$

$$\text{Mg}\sin\theta - \frac{1}{R}\frac{a_{cm}}{R} = \text{Ma}_{cm}$$

$$\to -Ma_{cm} - \frac{1}{R^2}a_{cm} = -\text{Mg}\sin\theta$$



गुणा –1 करने पर

$$Ma_{cm} + \frac{1}{R^2}a_{cm} = \text{M g}\sin\theta$$

$$\boxed{a_{cm} = \frac{g\sin\theta}{1+\frac{1}{MR^2}}}$$

(*ii*) एक कृत्रिम उपग्रह के घूमने के आवर्तकाल का व्यंजक प्राप्त कीजिए। भू-स्थैतिक उपग्रह क्या होता है?

उत्तर– एक कृत्रिम उपग्रह के घूमने के आवर्तकाल के व्यंजक के लिये कृपया पृष्ठ संख्या 71 पर प्रश्न संख्या 8 देखें तथा भू-स्थैतिक उपग्रह के लिये पृष्ठ संख्या 73 पर प्रश्न संख्या 11 देखें।

(*iii*) 1.2 m लम्बाई और 1×10^{-3}m त्रिज्या के एक ऊर्ध्वाधर लटके हुए तार को 15 N बल लगाकर लम्बाई के अनुदिश खींचा जाता है। गणना कीजिए-

(*a*) उत्पन्न प्रतिबल

(*b*) तार की लम्बाई में वृद्धि ($Y = 12\times10^{10}$ N/m^2)

उत्तर– दिया है $F = 15\,N$, $L = 1.2\,m$, $r = 1\times10^{-3}\,m$, $Y = 12\times10^{10}\,N/m^2$

(*a*)
$$\sigma = \left(\frac{F}{A}\right)$$
$$= \frac{F}{\pi r^2}$$
$$= \frac{15}{\pi\times1\times10^{-3}\times1\times10^{-3}}$$
$$= 4.7\times10^6\,N/m^2$$

(*b*)
$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{y}$$
$$\Delta l = \frac{\sigma\times l}{y}$$
$$\Delta l = \frac{4.7\times10^6\times1.2}{12\times10^{10}}$$
$$\Delta l = \frac{4.7\times1.2}{12\times10^4}$$
$$\Delta l = \frac{5.64}{12\times10^4} = 0.46\times10^{-4}\text{ meter}$$

प्रश्न 5. किन्हीं दो खण्डों को हल कीजिए। [2 × 5 = 10]

(*i*) द्रवों से सम्बन्धित 'पृष्ठ तनाव' और 'श्यानता' गुणों को समझाइए। द्रवों के प्रवाह में 'रेनोल्ड संख्या' का क्या महत्व है?

उत्तर– **द्रवों से सम्बन्धित पृष्ठ तनाव के गुण–** कृपया पृष्ठ संख्या 85 पर प्रश्न संख्या 4 देखें।

द्रवों से सम्बन्धित श्यानता गुण– कृपया पृष्ठ संख्या 90 पर प्रश्न संख्या 24 देखें।

द्रवों के प्रवाह में ''रेनोल्ड संख्या'' का महत्व–कृपया पृष्ठ संख्या 92 पर प्रश्न संख्या 29 का (3) पाइंट देखें।

(*ii*) ऊष्मीय प्रसार गुणांक को परिभाषित कीजिए। रेखीय प्रसार, क्षेत्रीय प्रसार तथा आयतन प्रसार गुणांकों में सम्बन्ध स्थापित कीजिए।

उत्तर– **ऊष्मीय प्रसार गुणंक–** कृपया पृष्ठ संख्या 101 पर प्रश्न संख्या 6 देखें।

(*iii*) ऊष्मीय चालकता गुणांक से आप क्या समझते हैं? इसका S.I. मात्रक और विमा बताइए।

1×10^{-4} m^2 अनुप्रस्थ काट वाली एक समरूप छड़ से, जिसमें ताप प्रवणता 5 केल्विन/मी. है, 4×10^{-4} J/s ऊष्मा प्रवाहित होती है। इसके पदार्थ की ऊष्मीय चालकता गुणांक ज्ञात कीजिए।

उत्तर– **ऊष्मीय चालकता गुणांक–** कृपया पृष्ठ संख्या 104 पर प्रश्न संख्या 11 देखें।

ऊष्मीय चालकता गुणांक की मात्रक विमा–

मात्रक– जूल/ (मीटर-सेकण्ड –°C)

अथवा वाट/ (मीटर –°C)

विमा– $[MLT^{-3}\theta^{-1}]$

$$\theta = KA\left(-\frac{dt}{dx}\right)$$
$$\frac{\theta}{A} = K\left(-\frac{dt}{dx}\right)$$
$$K = \frac{4\times10^{-4}}{1\times10^{-4}\times5}$$
$$\boxed{K = 0.8\text{ watt per meter kelvin.}}$$